Números reales

J. Martín-García

E-mail: javier.margar.17@educa.jcyl.es

Abstract

El objetivo de esta unidad es el de introducir el concepto de número real. Para ello, repasaremos los conjuntos numéricos ya conocidos ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$), su definición y propiedades y daremos una motivación para la construcción de un conjunto más amplio denominado el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Tras definir algunos conceptos de utilidad en los números reales (como la función valor absoluto o el concepto de error absoluto y relativo) pasaremos a estudiar algunos subconjuntos de $\mathbb{R}$ como son los intervalos y semirrectas. A continuación repasaremos algunas de las operaciones básicas que podemos realizar entre números reales, haciendo hincapié en la potenciación y radicación, la relación entre estas y las propiedades de las mismas. Acabamos la unidad con una aplicación interesante de la potenciación orientada al cálculo de beneficios económicos en sistemas de interés compuesto.

Contents

1 Algunos aspectos básicos de la teoría de conjuntos. **3**

1.1 ¿Qué es un conjunto?. Formas de especificar un conjunto. 3

1.2 Algunas relaciones y operaciones sencillas entre conjuntos 5

1.2.1 La relación de pertenencia e inclusión 6

1.2.2 Operaciones entre conjuntos: unión e intersección 8

2 Conjuntos numéricos **12**

2.1 Los números naturales. $\mathbb{N}$ 12

2.2 Los números enteros $\mathbb{Z}$ 12

2.3 Los números racionales $\mathbb{Q}$ 13

2.4 Los números reales $\mathbb{R}$ 16

2.5 Representación decimal de números racionales e irracionales 17

3 Algunas herramientas útiles en $\mathbb{R}$. Valor absoluto. Aproximaciones **20**

3.1 Aproximación de números reales. Error absoluto y error relativo 20

4 La recta real **20**

4.1 Representación de números en la recta real 20

4.1.1 Representación de números racionales 20

4.1.2 Representación de raíces 20

4.2 Subconjuntos de la recta real: intervalos y semirrectas 21

4.2.1 Intersección de intervalos y semirrectas 21

5 Potencias **21**

5.1 Potencias de exponente natural 21

5.2 Potencias de exponente entero 21

5.2.1 Notación científica 21

6 Radicación **21**

6.1 Introducción al concepto de función y función inversa 21

6.1.1 Función 22

6.1.2 Composición de funciones. Función inversa 23

6.2 Funciones entre conjuntos numéricos. Radicación como operación inversa de la potenciación 26

6.3 Ambigüedad en la inversión de una función. Raíz positiva y negativa de un número 30

6.4 Radicales como extensión de las potencias a $\mathbb{Q}$. Propiedades de los radicales . 30

7 Aplicación de las potencias a las finanzas. Porcentajes. Interés simple y compuesto **32**

7.1 Porcentajes. Encarecimiento o rebaja de un precio 32

7.2 Interés simple 32

7.3 Interés compuesto 32

1 Algunos aspectos básicos de la teoría de conjuntos.

La teoría de conjuntos es una de las ramas más fundamentales de las matemáticas. Tanto es así que se podría decir que todas las matemáticas se pueden construir de forma deductiva a partir de los principios y axiomas básicos de la teoría de conjuntos. El objetivo de esta pequeña introducción, no obstante, no es ni mucho menos profundizar en un estudio sistemático de esta disciplina, sino simplemente dar algunas pinceladas que nos serán útiles para entender mejor los conjuntos numéricos y algunos de sus sub-conjuntos.

1.1 ¿Qué es un conjunto?. Formas de especificar un conjunto.

La definición formal de lo que es un conjunto es algo demasiado abstracto para nuestro curso, pero asumiremos de momento que un conjunto es simplemente una colección de elementos diferentes. La forma más sencilla de definir un conjunto es simplemente enumerar dichos elementos, de modo que es fácil pensar en ejemplos de conjuntos con cualquier cosa que nos venga a la mente. Por ejemplo, las siguientes colecciones son conjuntos:

$$\begin{aligned} B &= \{a, e, i, o, u\} && (1) \\ C &= \{\text{Perro}, \text{Gato}, \text{Loro}, \text{Tortuga}\} && (2) \\ D &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}\,. && (3) \end{aligned}$$

De estos ejemplos podemos deducir la notación estándar para un conjunto de este tipo, es decir, usando llaves y separando los elementos por comas

$$\text{Conjunto} = \{\text{Elemento 1}, \text{Elemento 2}, \text{Elemento 3}, ...\}\,. \tag{4}$$

En los ejemplos que acabamos de poner, los elementos de B, C y E parecen tener una cierta relación. En particular, podríamos decir que el conjunto B es el conjunto de las vocales del alfabeto castellano, que C es un conjunto de mascotas o que D es un conjunto de números. No obstante, nada nos impide imaginarnos conjuntos con elementos muy dispares. Cualquier conjunto tiene derecho a existir. Por ejemplo

$$E = \{e, i, \text{Perro}, 5, 6\} \tag{5}$$

también es un conjunto.

Después de estos ejemplos deberíamos tener al menos una primera intuición de lo que es un conjunto. Si queremos una metáfora un poco menos abstracta, se trata de una especie de "caja" mental en la que podemos meter cosas, y esas cosas pueden ser lo que queramos: objetos, números, letras, ideas...lo que queramos. Pero volvamos a los ejemplos de antes para ver si podemos encontrar formas más inteligentes de definir algunos conjuntos. En el caso del conjunto E que veíamos en (5) parece difícil pensar en una forma más económica de describir ese conjunto (precisamente por lo dispares que son sus elementos), pero ¿se te ocurre otra forma de describir el conjunto B? En efecto, como dijimos antes, una posible forma sería la siguiente

$$B = \{\text{Letras del alfabeto que son vocales}\}\,. \tag{6}$$

Espero que estés de acuerdo conmigo en que esta descripción del conjunto B es equivalente a la que dimos en (1). La diferencia es que en lugar de especificar los elementos de uno en uno, esta vez los hemos definido en base a sus propiedades. Siempre que estas propiedades estén bien definidas y bien redactadas, ¡esta es una forma perfectamente válida de definir nuevos conjuntos! Así pues, tenemos otra forma de definir conjuntos como sigue

$$\text{Conjunto} = \{\text{Todos los elementos que cumplan una cierta propiedad }\}\,. \tag{7}$$

Ahora que hemos visto que esto es posible ¿se te ocurre otra forma de describir el conjunto D de (3)? Efectivamente, podemos hacerlo de la siguiente forma[1]

$$D = \{\text{Números naturales menores que } 14\} \tag{8}$$

Es más fácil que enumerarlos uno por uno ¿verdad?

Vamos a ver algunos ejemplos de conjuntos definidos de las dos maneras para que se entienda

[1] 'Oficialmente' aún no hemos llegado a ver lo que es un número natural, pero espero que se entienda a qué nos referimos.

bien el concepto

$$
\begin{aligned}
F &= \{\text{Harry}, \text{Ron}, \ \text{Hermione}\} = \{\text{Personajes principales de Harry Potter}\} && (9)\\
G &= \{\text{Patas}, \text{Asiento}, \text{Respaldo}\} = \{\text{Partes de una silla}\} && (10)\\
H &= \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} = \{\text{Números naturales mayores que 4 y menores que 12}\}. && (11)
\end{aligned}
$$

Todos estos son ejemplos de conjuntos relativamente pequeños (tienen pocos elementos) con lo que puede parecer irrelevante la forma que escojamos para nombrarlos. No obstante, se puede dar el caso de que estemos interesados en conjuntos muy grandes, de modo que definirlos a través de sus propiedades puede ser mucho más interesante que enumerar sus elementos. Por ejemplo, imaginemos los siguientes conjuntos

$$
\begin{aligned}
I &= \{\text{Especies de ave}\} && (12)\\
G &= \{\text{Nombres de mujer}\} && (13)\\
H &= \{\text{Números naturales mayores que 25}\}. && (14)
\end{aligned}
$$

Como puedes imaginar, existen miles de especies de ave y nombres de mujer, de modo que si queremos referirnos a estos conjuntos resulta mucho más económico describirlos de esta manera que enumerar todos esos elementos. El caso más extremo es el del conjunto H, que de hecho consta de infinitos elementos. Vemos por tanto que los conjuntos pueden ser también infinitos, en cuyo caso la única forma de definirlos es precisamente usando sus propiedades ya que no podemos enumerar y escribir en un papel un número infinito de elementos.

Antes de terminar, déjame que defina un último conjunto que a veces tiene un protagonismo especial: el conjunto vacío. Este conjunto se suele denotar con el símbolo $\emptyset$ y simplemente es el conjunto que no tiene ningún elemento:

$$\emptyset = \{ \ \}. \tag{15}$$

1.2 Algunas relaciones y operaciones sencillas entre conjuntos

Una vez que hemos entendido lo que es un conjunto, es justo preguntarse si hay algo que podamos hacer con ellos. ¿Qué tipo de relaciones puede haber entre conjuntos? ¿Puede un conjunto tener otro conjunto dentro? ¿Podemos sumar o restar conjuntos?

Lo cierto es que se pueden definir multitud de relaciones y operaciones entre conjuntos pero nos vamos a limitar en este capítulo al estudio de sólo unas pocas: las relaciones de pertenencia e inclusión y las operaciones de unión e intersección.

1.2.1 La relación de pertenencia e inclusión

Volvamos a uno de los primeros conjuntos que propusimos, por ejemplo el de las vocales

$$B = \{a, e, i, o, u\} . \tag{16}$$

Si has entendido la sección anterior, estarás de acuerdo conmigo en que la letra "u" *pertenece a* este conjunto. Pues bien, existe un símbolo matemático que indica esta noción de "pertenece a", y que es el símbolo $\in$. Así pues, en este caso $u \in B$.

Hasta aquí parece sencillo, pero sólo hemos hablado de elementos sueltos. Ahora bien ¿podría un conjunto contener a otros conjuntos? La respuesta es que ¡sí! Es fácil imaginarse algunos ejemplos. Por ejemplo, si tenemos los siguientes conjuntos

$$C = \{\text{Perro}, \text{Gato}, \text{Loro}, \text{Tortuga}\} \tag{17}$$

$$J = \{\text{Especies de animal}\} \tag{18}$$

parece claro que todos los elementos de C estarán también en J, ¿verdad? Cuando esto ocurra diremos que C *está incluido en* J y utilizaremos el símbolo $\subset$ para denotarlo

$$C \subset J . \tag{19}$$

Dado que C es un conjunto y J otro conjunto, también es habitual decir que C es un *subconjunto* de J. Dado un conjunto cualquiera es muy fácil construir un subconjunto del mismo, puesto que basta con escoger cualquier colección de sus elementos y formar un conjunto con ellos. Por ejemplo, si recordamos el conjunto

$$E = \{e, i, \text{Perro}, 5, 6\} , \tag{20}$$

tendremos que cualquiera de los siguientes conjuntos serán subconjuntos de E

$$K = \{e, \text{Perro}, 6\} \tag{21}$$

$$L = \{i, \text{Perro}, 5, 6\} \tag{22}$$

$$M = \{e, 6\}, \tag{23}$$

es decir, que

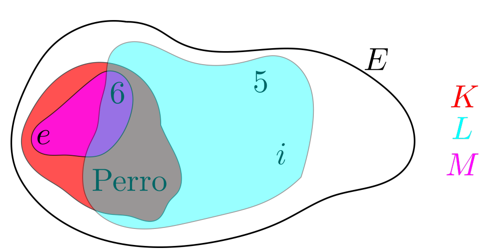
$$K \subset E \tag{24}$$

$$L \subset E \tag{25}$$

$$M \subset E \tag{26}$$

de hecho, si te fijas ¡M es un subconjunto de K!, de modo que también podemos escribir $M \subset K$ o enunciar de golpe las dos inclusiones $M \subset K \subset E$.

Una forma bastante útil de visualizar este tipo de relaciones son los conocidos como *diagramas de Venn*. La clave de estos diagramas es colocar todos los elementos sobre un plano y denotar los conjuntos como una especie de 'burbuja' alrededor de los elementos que contienen. Así, si un elemento está dentro de la burbuja de un conjunto será que pertenece a dicho conjunto, y de forma análoga si una burbuja está totalmente contenida dentro de otra entonces significará que el primer conjunto es un subconjunto del segundo. Una imagen vale más que mil palabras, de modo que lo mejor es hacer el diagrama de Venn del ejemplo anterior: La utilidad de este tipo de diagramas es que de una forma muy visual nos permiten



ver de un vistazo toda la estructura de conjuntos y subconjuntos que estamos estudiando. Incluso aunque no representemos todos los elementos, este tipo de diagramas resultan muy útiles para visualizar estas relaciones

1.2.2 Operaciones entre conjuntos: unión e intersección

Una vez que hemos entendido el concepto de "pertencia" de un elemento a un conjunto y el (muy similar) concepto de "inclusión" de un conjunto en otro, es hora de que definamos algunas operaciones entre conjuntos. Como dijimos en la introducción, existen bastantes operaciones intuitivas que hacer con ellos, pero nos vamos a limitar a las dos más básicas: la *unión* y la *intersección* de conjuntos.

Unión de dos conjuntos. Vamos con la primera. Como hemos dicho, un conjunto es una especie de 'caja' mental en la que agrupamos una serie de elementos, de modo que si tenemos dos o varias cajas, una de las operaciones más sencillas que nos podemos imaginar es 'juntarlas' en una sola caja. En concreto, imaginemos que tenemos otra vez los conjuntos

$$\begin{aligned} B &= \{a, e, i, o, u\} && (27) \\ C &= \{\text{Perro}, \text{Gato}, \text{Loro}, \text{Tortuga}\}\,, && (28) \end{aligned}$$

entonces podemos imaginar un tercer conjunto que contenga todos los elementos de B y también todos los elementos de C. Dicho conjunto es lo que llamaremos *unión* de B y C y lo denotaremos con la notación $B \cup C$. En nuestro caso:

$$B \cup C = \{a, e, i, o, u, \text{Perro}, \text{Gato}, \text{Loro}, \text{Tortuga}\}\,. \tag{29}$$

Podemos hacer uniones de conjuntos finitos (como la que acabamos de hacer) y también de conjuntos infinitos. Por ejemplo, si definimos los siguientes conjuntos

$$I = \{\text{números naturales pares}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \tag{30}$$

$$P = \{\text{números naturales impares}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}, \tag{31}$$

¿cuál será el conjunto $I \cup P$? Efectivamente será el conjunto de todos los números naturales

$$I \cup P = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...\}. \tag{32}$$

En los dos ejemplos que hemos visto, los conjuntos originales no tenían elementos repetidos, pero ¿qué ocurre si los tienen? Por ejemplo, podríamos imaginarnos un par de conjuntos como los que utilizamos en (21)

$$K = \{e, \text{Perro}, 6\} \tag{33}$$

$$L = \{i, \text{Perro}, 5, 6\} \tag{34}$$

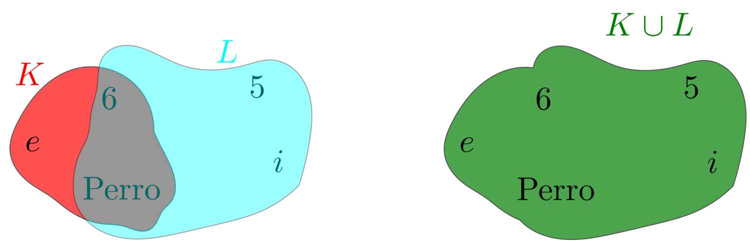
y nuestra primera tentación podría ser escribir su unión de la siguiente forma

$$K \cup L \stackrel{?}{=} \{e, i, \text{Perro}, \text{Perro}, 5, 6, 6\}. \tag{35}$$

No sería una mala intuición, pero habríamos obviado una sutileza que exigimos a los conjuntos cuando los definimos en la sección 1.1: los elementos de un conjunto tienen que ser *diferentes*. Por suerte el problema tiene fácil solución: simplemente no repetiremos nunca elementos cuando hagamos una unión, de modo que en este caso tendremos

$$K \cup L = \{e, i, \text{Perro}, 5, 6\}. \tag{36}$$

y con esta regla nos aseguramos que *la unión de dos conjuntos siempre será otro conjunto*. Si lo pensamos en el diagrama de Venn, de hecho, resulta muy intuitivo por qué no repetimos los elementos. Si te fijas, los elementos realmente no existen por duplicado, sino que simplemente los hemos metido de alguna manera en dos burbujas (dos conjuntos) a la vez. Considerar la unión entre dos conjuntos no es más que unir las burbujas y evidentemente esto no duplica los elementos de su interior



Intersección de dos conjuntos. Una vez que hemos entendido lo que significa unir dos conjuntos, sólo nos queda definir lo que significa hallar la ‘intersección’ de dos conjuntos. De hecho, este concepto tiene mucho que ver con lo que acabamos de hablar sobre elementos repetidos puesto la intersección de dos conjuntos es precisamente eso: el conjunto de los elementos que están repetidos en ambos o, mejor dicho, el conjunto de elementos que pertenecen a ambos. De nuevo, más allá de definiciones formales, será más útil que lo veamos con un ejemplo. Volvamos a escribir de nuevo los mismos conjuntos que estudiamos en la sección anterior

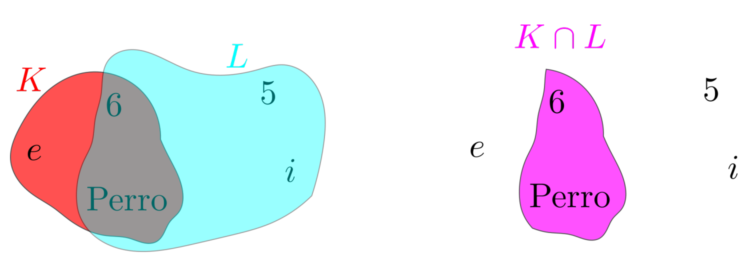
$$K = \{e, \text{Perro}, 6\} \tag{37}$$

$$L = \{i, \text{Perro}, 5, 6\}\,. \tag{38}$$

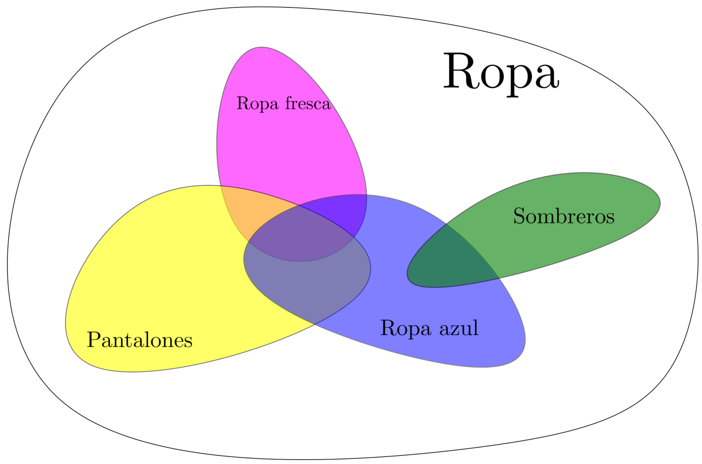
Como hemos dicho, la intersección de estos dos conjuntos es simplemente el conjunto de elementos que pertenecen a ambos, de modo que estará conformado por los elementos ‘$6'$ y ‘Perro’ y lo denotaremos con la notación $K \cap L$

$$K \cap L = \{6, \text{Perro}\}\,. \tag{39}$$

De nuevo, el diagrama de Venn nos da mucha intuición sobre este concepto, puesto que podemos pensar en el conjunto $K \cap L$ simplemente como aquella burbuja en la que las otras dos se solapan. En nuestro ejemplo:



A modo de resumen y último ejemplo, veamos este diagrama de Venn que nos muestra una serie de conjuntos relacionados con la moda



Este sencillo diagrama nos proporciona muchísima información sobre algunos subconjuntos de ropa y sus relaciones. Veamos cómo podemos escribir todas estas relaciones en las notaciones que hemos aprendido

$$\text{Ropa fresca} \subset \text{Ropa} \tag{40}$$

$$\text{Sombreros} \subset \text{Ropa} \tag{41}$$

$$\text{Ropa azul} \subset \text{Ropa} \tag{42}$$

$$\text{Pantalones} \subset \text{Ropa} \tag{43}$$

$$\text{Pantalones} \cap \text{Ropa azul} = \text{Pantalones azules} \tag{44}$$

$$\text{Sombreros} \cap \text{Ropa azul} = \text{Sombreros azules} \tag{45}$$

$$\text{Ropa fresca} \cap \text{Ropa azul} = \text{Ropa fresca azul} \tag{46}$$

$$\text{Sombreros} \cap \text{Ropa fresca} = \emptyset \tag{47}$$

$$\text{Pantalones} \cap \text{Ropa fresca} = \text{Pantalones frescos} \tag{48}$$

$$\text{Pantalones} \cap \text{Ropa fresca} \cap \text{Ropa azul} = \text{Pantalones frescos y azules} \tag{49}$$

$$\text{Pantalones} \cap \text{Sombreros} = \emptyset \tag{50}$$

2 Conjuntos numéricos

Durante la sección anterior hemos explorado brevemente las bases de la teoría de conjuntos. Si es la primera vez que ves esto quizás te estés preguntando qué tiene todo eso que ver con las matemáticas: ¿Dónde están los números? Lo cierto es que, como ya dijimos, la teoría de conjuntos es una parte completamente fundamental de las matemáticas, y las matemáticas estudian muchísimas más cosas aparte de los números. No obstante la unidad que nos ocupa va precisamente sobre los diferentes conjuntos numéricos, así que es hora de que conectemos ambos conceptos definitivamente, y exploremos la estructura de los mismos.

2.1 Los números naturales. $\mathbb{N}$

Como su propio nombre indica, los números naturales son una de las nociones matemáticas más intuitivas que existen. Se trata de aquellos números que utilizamos para contar, y el ser humano ha conocido su existencia desde hace milenios. Es habitual representarlos con la letra $\mathbb{N}$ y constituyen un conjunto infinito y ordenado de elementos.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\} \tag{51}$$

2.2 Los números enteros $\mathbb{Z}$

Durante siglos, el concepto de número negativo perturbó a los matemáticos, que se negaban a aceptar su existencia como algo "‘real”. En efecto, uno no puede contar cosas negativas (no hay ninguna caja que contenga, por ejemplo, -3 bombones salvo que nos imaginemos algún tipo de mundo hecho de antimateria), pero acabó quedando claro que el concepto de número negativo podía ser útil para representar conceptos más abstractos como el de ‘deuda’. Así, si me han prestado 1000 euros y cobro 1200 el mes siguiente, tras saldar mis deudas me quedarán 200, con lo que tiene sentido decir que inicialmente tenía -1000.

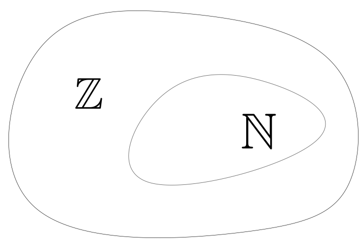
Una moraleja de esto es que los números no existen ni dejan de existir en el mundo real:

son simples conceptos abstractos que inventamos para trabajar con ellos. Si tienen alguna utilidad inventarlos no habrá sido en vano.

Yendo al grano, los números naturales negativos, es decir $-1, -2, -3, -4$, etc. nos permiten construir un nuevo conjunto de números llamado *números enteros*, y que habitualmente designamos con el símbolo $\mathbb{Z}$. Este conjunto contiene a los mencionados naturales negativos y también a los positivos y al número 0, de modo que

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, ...\} \tag{52}$$

al igual que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ es un conjunto ordenado y que consta de infinitos elementos y tendremos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$. El diagrama de Venn que representa esta relación es el siguiente



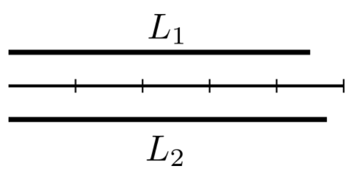
2.3 Los números racionales $\mathbb{Q}$

Históricamente, el concepto de número racional surgió antes que el de número negativo. No podemos saber a ciencia cierta en qué contexto apareció por primera vez, pero es probable que sea incluso anterior a la escritura, puesto que resulta muy natural definir cantidades como "la mitad" o "un tercio" de algo. En particular, en cualquier contexto de reparto (un animal que se ha cazado entre dos personas, un saco de trigo o una parcela a dividir) encontraremos que la unidad básica de medida necesita ser dividida en unidades más pequeñas, lo que da lugar al concepto de *fracción*.

Además de los repartos no exactos, otro problema típico que nos lleva a definir fracciones podría ser el siguiente: supongamos que queremos comprar una parcela y queremos medir su tamaño para compararla con otra y así decidir cuál de las dos ofertas es más conveniente. Si estamos en el año 4000 a.C. (por ejemplo) no dispondremos de metros ni ninguna otra medida estandarizada así que tendremos que tomar una unidad de medida que nosotros escojamos, como por ejemplo algun tipo de vara de nuestra elección. Al llegar a las tierras nos encontramos con que ambas miden más de cuatro varas pero menos de cinco de longitud, es decir

$$4 \text{ varas} < L_1 < 5 \text{ varas} \tag{53}$$

$$4 \text{ varas} < L_2 < 5 \text{ varas} \tag{54}$$



¿Cómo decidimos cuál de las dos es más grande? Existen varias formas de solucionar este problema, pero una de ellas nos viene inmediatamente a la cabeza: ¿y si en lugar de con varas partimos la vara a la mitad (o hacemos una marca) y medimos con mitades de vara? ¿cabrá un número exacto de medias varas en cada longitud? Si miramos el dibujo la respuesta parece obvia: la longitud de la primera tierra será exactamente de 4 varas y media o bien de 9 'medias varas' lo que representamos con la notación

$$L_1 = \frac{9}{2} \text{ vara} \tag{55}$$

En el caso de la segunda parcela tampoco la media vara es una unidad capaz de medir exactamente nuestra tierra, de modo que podemos repetir nuestra idea y dividir la 'media vara' de nuevo la mitad. Tras esto, llegaremos a la conclusión de que la segunda parcela mide 4 varas + media vara + un cuarto de vara o, lo que es lo mismo, 19 'cuartos de vara', lo cual representamos como

$$L_2 = \frac{19}{4} \text{ vara} \tag{56}$$

¿Cómo comparamos entonces L_1 y L_2? Tal y como lo hemos expresado, la primera está medida en 'medias varas' y la segunda en 'cuartos de vara' así que no parece obvio cómo comparar ambas cantidades. La solución es tan simple como expresar ambas medidas en una unidad común, que en nuestro caso tendrá que ser el cuarto de vara. En efecto, por medir L_1 un número exacto de 'medias varas' medirá también un número exacto de 'cuartos de vara' (el doble concretamente) de modo que podemos expresar esta cantidad como

$$L_1 = \frac{18}{4}\ \text{vara}\,. \tag{57}$$

Por fin tenemos dos magnitudes que podemos comparar. Evidentemente 19 'cuartos de vara' son más que 18, por lo que podemos concluir que $L_2 > L_1$: la segunda parcela es más larga.

Este pequeño ejercico de imaginación nos sugiere la forma en la que los números racionales pudieron aparecer, pero es hora de que demos una definición algo más general y precisa. Ahí va:

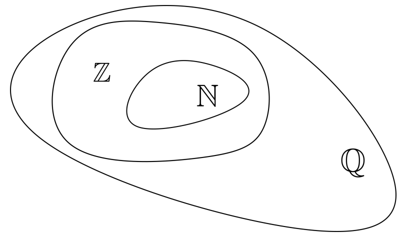
El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ está formado por aquellos números que pueden ser expresados como cociente de dos números enteros, es decir, si x es un número racional, entonces $x = \frac{p}{q}$ donde tanto p como q son enteros (y además $q \neq 0$).

De esta definición se sigue que números como el $\frac{3}{4}$, el $-\frac{18}{7}$ o el $\frac{32435235}{4323}$ son números racionales, entre otros. Pero ojo a la definición puesto que contiene algunas sutilezas. Si nos fijamos, no hemos dicho que los racionales *tengan* que ser expresados como fracciones sino que *pueden* se expresados como tales. Así pues, el número 3 o el número -7 también son racionales porque podemos expresarlos como una fracción (de hecho, ¡como muchas!). En particular

$$3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = ... \tag{58}$$

$$-7 = \frac{-7}{1} = \frac{14}{-2} = \frac{-14}{2} = \frac{-21}{3}... \tag{59}$$

La consecuencia inmediata de esto es que los números enteros (y por tanto los naturales) también son números racionales y se sigue que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Volviendo al diagrama de Venn tendremos



2.4 Los números reales $\mathbb{R}$

Durante siglos se pensó que los números racionales eran todos los números que podían existir. Fuese cual fuese nuestro problema matemático (un reparto, una medida geométrica, el cálculo de una probabilidad, etc.) la solución siempre sería un número racional.

Volvamos a nuestro problema de las varas para entender un poco mejor qué significa esto. Como vimos en la sección anterior, resolver el problema de las parcelas y las varas requirió dividir nuestra unidad de medida en trozos más pequeños hasta que encontramos una unidad lo suficientemente pequeña como para caber un número entero de veces en la longitud de la parcela. En el caso de L_1 bastó con dividir la vara a la mitad, mientras que en el caso de L_2 tuvimos que hacer dicho proceso dos veces hasta usar los cuartos de vara. En ambos casos sin embargo llegamos a un final, puesto que encontramos dicha cantidad. Podría haber ocurrido que hubiésemos tenido que dividir la vara en trozos muy pequeños como los veinteavos de vara o las milésimas de vara, pero siempre llegaría un momento en el que encontraríamos la unidad lo suficientemente pequeña como para medir exactamente nuestra parcela...o al menos eso creían los griegos...pero en realidad es falso.

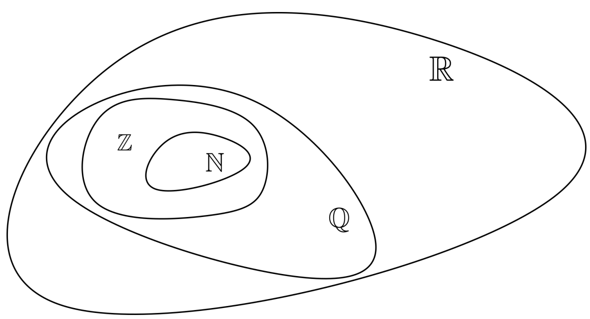
En efecto, existen casos en los que este proceso de subdivisión de varas nunca termina y por tanto no existe una división de la vara capaz de medir la longitud de forma exacta. Esto implica inmediatamente que, cuando esto ocurre, la longitud de esa parcela no puede expresarse como un cociente de enteros y por tanto no será un número racional. Los números que tienen esta propiedad son conocidos como números irracionales, y el conjunto de los mismos se denota con el símbolo $\mathbb{I}$. Algunos ejemplos de números racionales son el $\sqrt{2}$, el $-\sqrt{17}$ o el número π. Demostrar que un número es irracional es complicado y está fuera de los objetivos de este curso, pero nos conformaremos de momento con saber que las raíces de números primos [2] y otros números especiales como π son irracionales.

Pese a parecer números un tanto 'extraños', lo cierto es que existen infinitos números irracionales. Incluso si nos restringimos a un cierto intervalo, es posible demostrar que hay infinitos números irracionales entre el 0 y el 1, o entre cualquier otro par de racionales que se nos ocurran.

Una vez asumida la existencia de este tipo de números, podemos construir por fin el último conjunto numérico que vamos a estudiar, que estará conformado por la unión de todos los números racionales e irracionales, y que denominaremos *números reales* $\mathbb{R}$. Se tiene por tanto que

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} \tag{60}$$

y como consecuencia $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Volviendo al diagrama de Venn tendremos



2.5 Representación decimal de números racionales e irracionales

Con las definiciones que hemos dado en las secciones anteriores, distinguir si un número es racional o irracional parece sencillo, puesto que sólo tendremos que tratar de identificar si podemos escribirlo como un cociente de enteros. No obstante, debemos tener cuidado con esta definición y no caer en errores habituales como pensar que un cociente que incluya irracionales es racional o no darnos cuenta de que una raíz es exacta. A continuación damos unos cuantos

[2] Para el lector interesado, se desarrolla más tarde en un apéndice la demostración de que $\sqrt{3}$ es irracional

ejemplos de números racionales e irracionales

$$\left\{\frac{1}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{11}{-3}, \frac{\sqrt[3]{8}}{3}, \frac{\frac{5}{7}}{\frac{2}{3}}, 6, 0, -18, \frac{\frac{3}{5}}{2}\right\} \subset \mathbb{Q} \tag{61}$$

$$\left\{\pi, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \frac{1+\sqrt{2}}{5}, \sqrt[5]{7}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right\} \subset \mathbb{I} \tag{62}$$

En ocasiones, sin embargo, no disponemos de este tipo de representaciones de todos los números, sino que se se nos proporciona la representación decimal de los mismos. Algunos ejemplos de dicha representación pueden ser los siguientes

$$a = 7,125 \tag{63}$$

$$b = 3,14159265358979323846264338 32... \tag{64}$$

$$c = 1.4142135623730950488016887... \tag{65}$$

$$d = 0,3333333333333..... \tag{66}$$

$$e = 0,345345345345... \tag{67}$$

$$f = 2,45676767676767... \tag{68}$$

$$g = 1,7 \tag{69}$$

$$h = 5,12112111211112... \tag{70}$$

¿Cómo distinguimos en este caso si estos números son racionales o irracionales? En primer lugar será interesante clasificar estas expresiones decimales en dos grandes grupos: aquellas con un número finito de decimales y aquellas con un número infinito. Estudiémoslas por separado

Números con una expresión decimal finita Si el número de decimales es finito es fácil ver que siempre podremos escribir este número como un cociente de enteros. Si el número tiene, por ejemplo 3 decimales bastará con multiplicarlo por 1000 para obtener un entero, de tal modo que multiplicando y dividiedo por 1000 obtendremos una expresión racional del mismo. Quedará más claro con algunos ejemplos, como el número a y el g de la lista de ejemplos anteriores. En particular

$$a = 7,125 = \frac{7125}{1000} \tag{71}$$
$$g = 1,7 = \frac{17}{10} \tag{72}$$

En definitiva *todos los números con una cantidad finita de decimales son racionales.*

Números con una expresión decimal infinita. Si el número de decimales en la expresión decimal es infinito, deberemos distinguir dos subcategorías más:

- Si se trata de un decimal periódico, entonces el número será racional
- Si el decimal es no periódico entonces será un número irracional

Como podemos ver en los ejemplos anteriores, de entre aquellos números que tienen infinitos decimales, los números d, e y f serán racionales puesto que son periódicos, mientras que los números b, c y h no tendrán ningún periodo y por lo tanto serán irracionales.

3 Algunas herramientas útiles en $\mathbb{R}$. Valor absoluto. Aproximaciones

3.1 Aproximación de números reales. Error absoluto y error relativo

4 La recta real

4.1 Representación de números en la recta real

4.1.1 Representación de números racionales

4.1.2 Representación de raíces

.

4.2 Subconjuntos de la recta real: intervalos y semirrectas

4.2.1 Intersección de intervalos y semirrectas

5 Potencias

5.1 Potencias de exponente natural

5.2 Potencias de exponente entero

5.2.1 Notación científica

.

6 Radicación

Una vez que hemos comprendido la potenciación y sus propiedades, resulta interesante que terminemos el estudio de las operaciones básicas con la radicación. Como veremos en unos momentos, la radicación o 'hacer la raíz' de un número es una operación que en cierto sentido 'deshace' la operación de potencia o 'elevar a'. En términos más precisos, diremos que la raíz es la operación *inversa* de la potencia y veremos cómo de esta propia definición se siguen todas sus propiedades.

6.1 Introducción al concepto de función y función inversa

Definir el concepto de 'raíz cuadrada' con palabras requiere de ciertas volteretas lingüísticas. Una forma de escribir dicha definición sería la siguiente

La raíz cuadrada de un número x es aquel número $y = \sqrt{x}$ tal que elevado al cuadrado da como resultado el valor x, es decir tal que $y^2 = x$.

Si no has entendido la frase anterior, no te preocupes. Sin duda es una forma de definir algo un tanto confusa pero que encierra algunos conceptos profundos e importantes. Vamos a intentar esclarecer esos conceptos desde el principio y con un poco de suerte esto nos ayudará a entender mejor la definición anterior. Para ello, lo primero que vamos a estudiar es el concepto abstracto de *función*.

6.1.1 Función

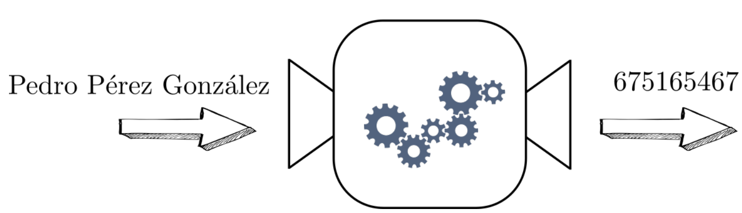
Dados dos conjuntos A y B, una función[3] *es una correspondencia entre elementos de A y B, de tal manera que se cumple que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.*

Después de esta definición es posible que te estés preguntando si no hemos ido de mal en peor. Efectivamente, esto es aún más abstracto, pero lo vas a entender en seguida con algunos ejemplos. Imaginemos los dos conjuntos siguientes

$$A = \{\text{Alumnos de clase}\} \tag{73}$$

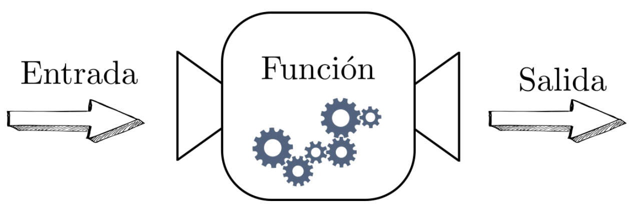
$$B = \{\text{Números de teléfono}\}, \tag{74}$$

y supongamos ahora que existe una 'máquina' capaz de respondernos el teléfono de cualquier alumno que le preguntemos. Podemos representar esta máquina como una caja con dos agujeros: uno por el que metemos una cierta entrada o 'input' (en nuestro caso el nombre de un alumno) y otro por el que nos devolverá la salida o 'output' (en este caso su número de teléfono). El esquema sería el siguiente:



[3] También llamada a veces *aplicación* o *mapeo*

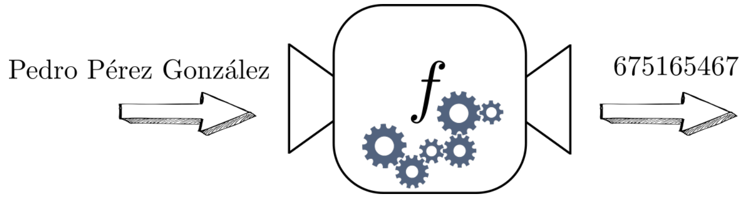
Por si queda alguna duda, no nos importa cómo funciona la máquina por dentro. Quizá es digital, quizá analógica o quizá la máquina es una persona que ha memorizado todos los números de teléfono de la clase. Todo eso nos da igual. Lo importante es que sabe emparejar a cada alumno con un sólo número de teléfono (el suyo) y eso convierte a esa máquina en una función. Vuelve a leer la definición de arriba hasta que te convenzas de que la has entendido. En el caso más general los conjuntos de partida y llegada pueden ser cualquier cosa que nos imaginemos: una función puede asignar cada gato a su dueño, cada país a su bandera, cada frecuencia a su nota musical o cada libro a su autor. Todas estas son funciones y (aunque no te lo parezca) todas son objeto de estudio de las matemáticas aunque no hablen de números, de modo que el esquema más general que podemos imaginar para una función es simplemente una máquina que transforma cada entrada en una salida.



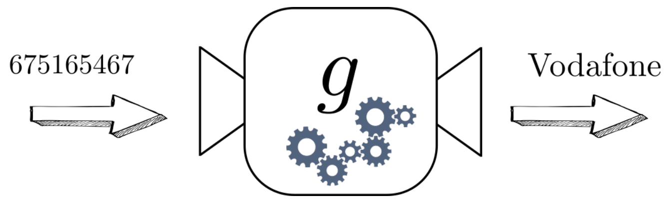
6.1.2 Composición de funciones. Función inversa

Una vez que nos adentramos en el apasionante mundo de las funciones es interesante estudiar qué tipo de cosas podemos hacer con ellas. Lo cierto es que existen varias cosas interesantes que podemos hacer con las funciones pero estamos dando demasiado rodeo para ver lo que es la raíz cuadrada así que será mejor que vayamos al grano y estudiemos sólo lo que nos interesa ahora mismo: la composición de funciones y lo que significa una función inversa.

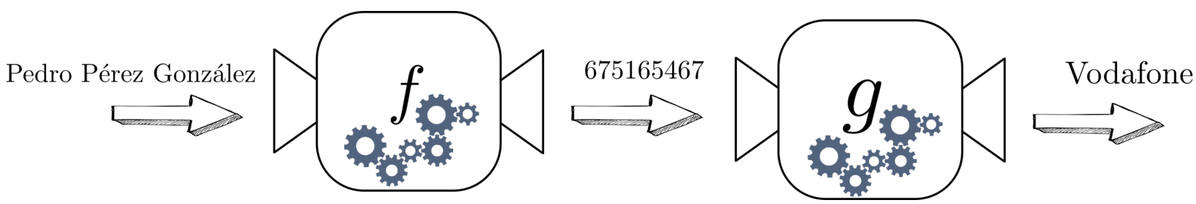
Vamos con lo primero. La noción de componer dos funciones es bastante sencilla: es la idea de usar el output de una función como input de otra. Será mejor verlo en un ejemplo: volvamos a la función que inventamos hace algunos párrafos (la que asignaba teléfonos a nombres). A partir de ahora vamos a hablar de varias funciones a la vez, así que será mejor que le demos un nombre para poder referirnos a ella, por ejemplo f



Bien. Imaginemos ahora que inventamos otra función (que vamos a llamar g) que hace lo siguiente: toma como entradas números de teléfono y nos devuelve el nombre de la compañía que gestiona ese contrato

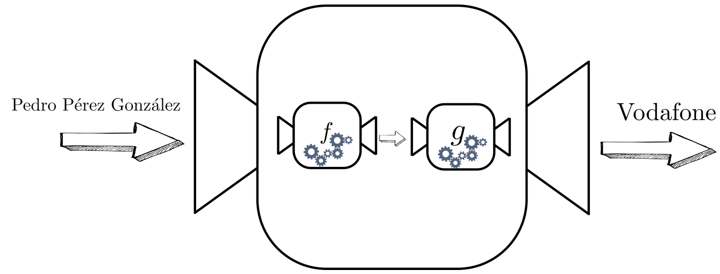


pues bien, parece bastante intuitivo que uno podría poner las dos máquinas en serie ¿verdad? Si hacemos que la salida de la primera función sea la entrada de la segunda entonces podremos introducir cada nombre a esta combinación de funciones y nos devolverá la compañía de teléfonos de esa persona

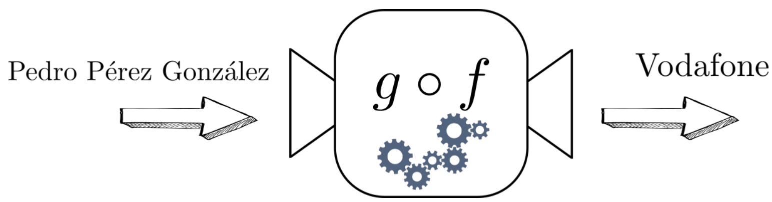


Esto que acabamos de hacer (poner dos funciones 'en serie' una detrás de otra) se llama *componer* funciones y podemos hacerlo siempre que tenga sentido, es decir, siempre que el conjunto de salidas de la primera función coincida con el de entradas de la segunda. Evidentemente no tendría sentido componer la función f con una función que asigna a cada país su bandera, puesto que un número de teléfono no es un país. Una cosa interesante de componer funciones es que es una manera de crear nuevas funciones. En efecto, componiendo f y g

hemos creado una nueva función que asigna compañías de teléfono a cada persona, de modo que podemos pensar en la unión de las dos 'máquinas' como una nueva 'máquina'.



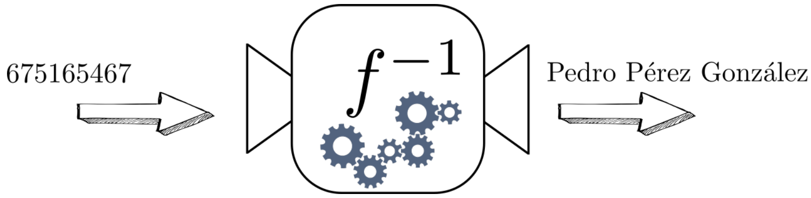
Existe una nomenclatura estándar para referirse a este tipo de funciones, que es la notación $g \circ f$, y que se lee 'f compuesta con g' [4].



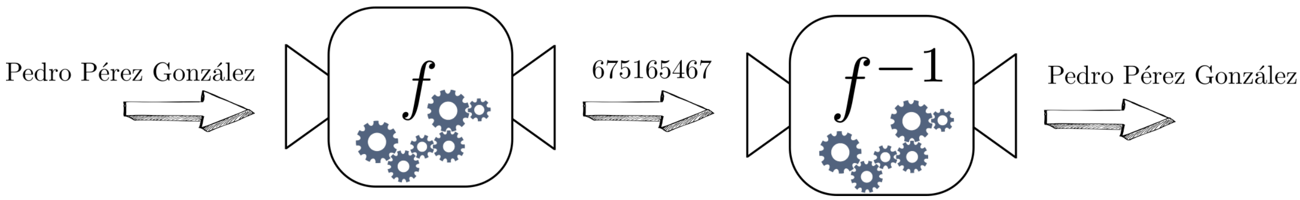
Antes de terminar con esta parte tan abstracta de las funciones, nos falta un último concepto por introducir: la función inversa. Imaginemos de nuevo que estamos trabajando con la función f que nos da los números de teléfono de cada alumno. Una pregunta interesante es: ¿podemos hacer funcionar la máquina 'al revés'? Es decir, ¿sería posible invertir el sentido de tal modo que la máquina reciba números de teléfono como entrada y nos devuelva a sus dueños como salida? Efectivamente, podemos imaginar una máquina que haga exactamente esto, y estos es precisamente a lo que llamaremos función inversa de f y la denotaremos como f^{-1}. [5]

[4]Efectivamente, el orden es el inverso al que uno esperaría, leyendo de derecha a izquierda. Aunque esto parezca confuso tiene su sentido , que veremos más tarde.

[5]La notación es un poco desafortunada porque puede inducirnos a pensar que $f^{-1} = \frac{1}{f}$ pero no es así. En este caso el $^{-1}$ indica simplemente una inversión en el sentido de funciones. El origen de la notación tiene un sentido que veremos en seguida pero reconozco que puede inducir a error...



Una consecuencia inmediata de esto es que si ponemos f y f^{-1} en serie (es decir, si las componemos) una máquina 'deshará' el trabajo hecho por la otra, devolviéndonos como salida exactamente lo que metimos en la entrada



en definitiva, la función compuesta $f^{-1} \circ f$ es la función que 'no hace nada' (devuelve la misma salida que entrada) y que usualmente se conoce como 'función identidad' o $\mathbb{1}$. De hecho, esta es la definición estricta de una función inversa:

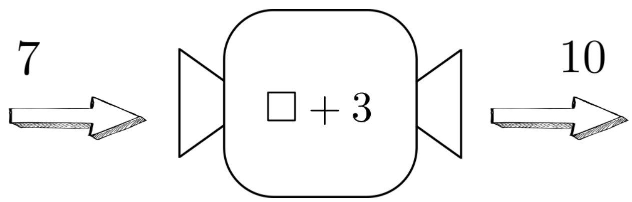
Llamamos función inversa f^{-1} de otra función f a aquella que cumple $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}$.

6.2 Funciones entre conjuntos numéricos. Radicación como operación inversa de la potenciación

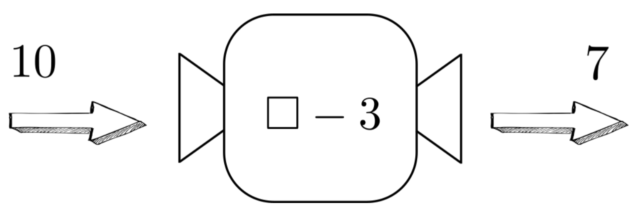
A estas alturas es muy probable que estés desesperada con tanto rodeo, tanta abstracción y divagación y te preguntes en qué momento vamos a aprender lo que es un radical. Prometo que casi estamos ahí y, con un poco de suerte, todo este camino habrá servido de algo y te hará entender de una forma algo más profunda el significado de esa operación.

En la sección anterior hemos visto que una función es un concepto muy general: una simple correspondencia entre elementos de dos conjuntos pero no hemos hablado mucho de números (más que de números de teléfono). Y es que las matemáticas son *mucho* más que números, pero por supuesto que estos también son importantes y es muy interesante estudiar las funciones que relacionan unos números con otros. Más tarde en el curso dedicaremos una unidad entera a hablar de éstas, pero conviene que veamos ahora un par de funciones sencillas para coger algo de intuición.

Imaginemos en primer lugar a la función que empareja cada número con otro 3 unidades mayor. Evidentemente esta es la función que realiza la operación de 'sumar 3' y nos relaciona elementos del conjunto de los números reales con otros elementos del mismo conjunto [6]

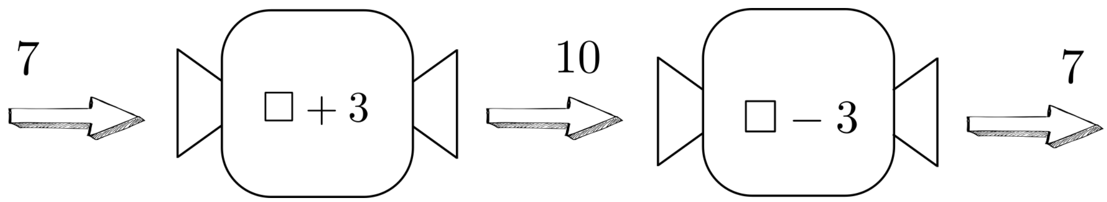


Bien, ¿cuál es entonces la función que es capaz de 'deshacer' el trabajo de esta? O con términos más pecisos ¿cuál sería la función inversa a sumar 3? Efectivamente: la función que resta esa misma cantidad



y, evidentemente si componemos ambas tendremos la identidad

[6] Aunque no vimos ejemplos de esto en la sección anterior, esto es perfectamente posible. Por ejemplo, podríamos imaginar la función que relaciona a cada alumno con el compañero de la mesa de al lado. Se trataría de una función que tiene el mismo conjunto de elementos de entrada y salida: los alumnos.

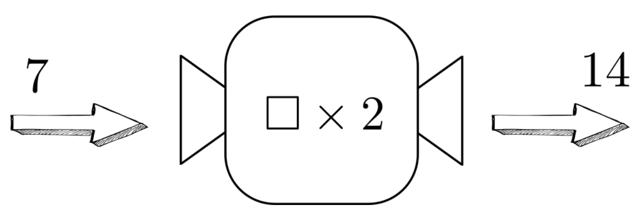


Con esto hemos visto en el lenguaje de funciones algo que en cierto modo ya sabíamos, y es que la resta no es ni más ni menos que la operación inversa a la suma. De hecho, si la queremos definir con palabras nos encontramos con que necesitamos una de esas volteretas lingüisticas como la que usamos para definir la raíz cuadrada

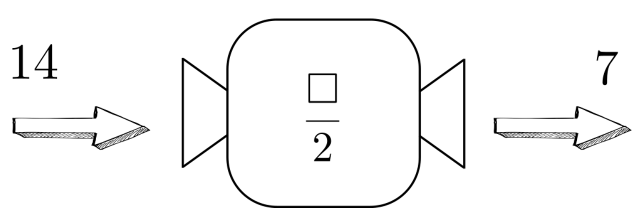
El número $y = x - p$ es aquel número tal que cuando le sumamos p obtenemos x, es decir, que cumple $y + p = x$.

que no es ni más ni menos que una forma de decir que la resta es la operación inversa de la suma.

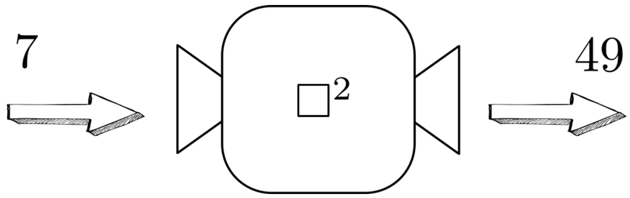
Vamos con un ejemplo más: imaginemos ahora la función que empareja a cada número real con con el doble de éste. Evidentemente esta es la función que multiplica por 2 y podemos representarla en nuestros dibujos como sigue



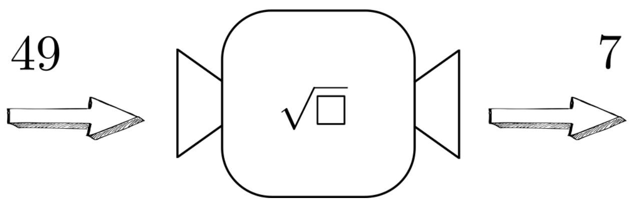
y evidentemente la función inversa será aquella que divide cada número por 2



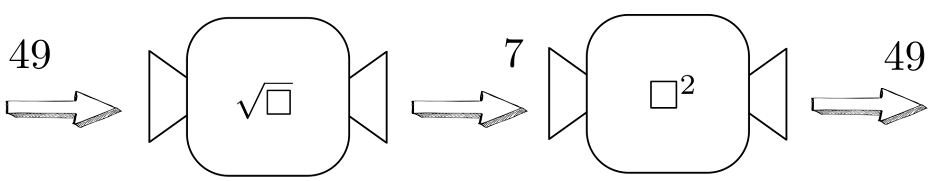
de modo que vemos que la división es la operación inversa a la multiplicación. Seguro que vas pillando la idea. Pues bien, si consideramos por último la función que empareja cada número con su cuadrado

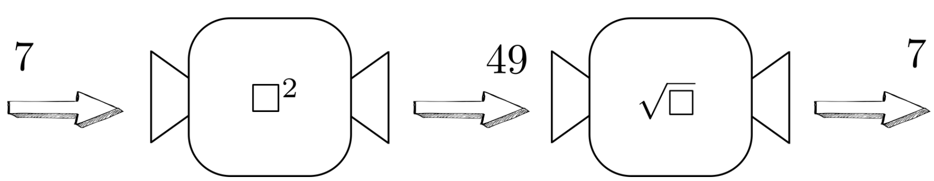


¿cuál será la función inversa? [7] Efectivamente, se trata de la raíz cuadrada, que representaremos con el símbolo $\sqrt{}$



¡Por fin! Hemos definido la raíz cuadrada. En realidad no hemos aportado nada más a la primera definición que dimos, pero espero que hacerlo por pasos haya sido de alguna manera un poco más esclarecedor. El que elevara al cuadrado y tomar raíz cuadrada sean operaciones inversa una de la otra implica, como en los otros casos que su composición nos da la identidad, de modo que





[7]Existe una sutileza con los signos que comentaremos más tarde. De momento obviaremos esto.

o, lo que es lo mismo y olvidándonos por fin de los dibujos

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = \sqrt{x^2} = x\,, \tag{75}$$

para cualquier número x. De forma análoga a la raíz cuadrada podemos definir la operación inversa para cualquier potencia x^n. En este caso dicha operación se llamará raíz $n-$ésima (cúbica, cuarta, quinta, etc.) y la representaremos con el símbolo $\sqrt[n]{x}$. Del mismo modo que con las raíces cuadradas, tendremos que por la definición de función inversa

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = \sqrt[3]{x^3} = \left(\sqrt[4]{x}\right)^4 = \sqrt[4]{x^4} = ... = \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = \sqrt[n]{x^n} = x\,, \tag{76}$$

6.3 Ambigüedad en la inversión de una función. Raíz positiva y negativa de un número

6.4 Radicales como extensión de las potencias a $\mathbb{Q}$. Propiedades de los radicales

Hemos dedicado bastante tiempo en la sección anterior a motivar la necesidad de inventar el concepto de radical y entender su relación con la potenciación. De hecho, lo siguiente que vamos a ver es que esta relación es aún más estrecha de lo que parece, de tal modo que si extendemos correctamente la noción de potencia veremos que podemos interpretar la radicación con un caso particular de potencias con exponentes especiales. Vamos a ello.

Si recuerdas, en la sección 5.1 definimos las potencias de exponente entero a^n como el resultado de multiplicar a por sí mismo n veces. Más tarde, en la sección 5.2 vimos cómo podía ser muy interesante extender esta noción de pontencia a exponentes negativos. El resultado fue que si interpretábamos $a^{-n} = 1/a^n$ obteníamos una notación muy útil para trabajar con este tipo de expresiones, de tal modo que todas las propiedades de las potencias naturales seguían siendo ciertas. La pregunta que viene ahora parece evidente: ¿tiene sentido seguir extendiendo la noción de potencia a exponentes racionales? Vamos a explorar esta idea.

Supongamos que efectivamente tiene sentido hablar de potencias fraccionarias y tomemos por ejemplo un caso sencillo como $7^{1/2}$. ¿Qué representa exactamente este número? Si las propiedades de las potencias siguen cumpliéndose entonces necesariamente tendrán que ser ciertas expresiones como las siguientes

$$
\begin{aligned}
7^{1/2} \times 7^{1/2} &= 7^{1/2+1/2} = 7 && (77)\\
(7^{1/2})^2 &= 7^{2/2} = 7\,. && (78)
\end{aligned}
$$

Si nos fijamos en la segunda tenemos que, sea lo que sea $7^{1/2}$, tiene la propiedad de que su cuadrado es 7 pero ¿esta no era precisamente la propiedad que definía a la raíz cuadrada? ¡Efectivamente! Si existe una forma de elevar 7 a 1/2 entonces necesariamente tendrá que ser lo mismo que tomar una raíz cuadrada

$$\sqrt{7} \equiv 7^{1/2} \tag{79}$$

y si pensamos en ejemplos con otros índices llegaremos a una conclusión similar

$$(7^{1/5})^5 = 7^{5/5} = 7 \quad \Longleftrightarrow 7^{1/5} \equiv \sqrt[5]{7} \tag{80}$$

Esto nos sugiere una nueva forma de representar una raíz como un exponente fraccionario, de modo que en general tendremos

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}\,. \tag{81}$$

Una de las ventajas de utilizar esta notación es que nos proporciona automáticamente las propiedades de los radicales sin más que extender las propiedades de las potencias a índices fraccionarios [8]. Todas las que conocemos seguirán siendo ciertas, de modo que si n, m, p, q son números enteros, podremos obtener las propiedades de los radicales sustituyendo $n = 1/p$ y $m = 1/q$ en las propiedades de las potencias. En particular

[8] Por supuesto esto no es una demostración de las propiedades de los radicales, pero al menos es un argumento que nos permite relacionarlas con las propiedades de las potencias. Así, si no recordamos alguna propiedad de los radicales, siempre la podemos deducir pasando los radicales a potencias y aplicando las propiedades de las potencias.

$$a^n b^n = (ab)^n \iff a^{1/p} b^{1/p} = (ab)^{1/p} \iff \sqrt[p]{a}\sqrt[p]{b} = \sqrt[p]{ab} \tag{82}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \iff \frac{a^{1/p}}{b^{1/p}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} \iff \frac{\sqrt[p]{a}}{\sqrt[p]{b}} = \sqrt[p]{\frac{a}{b}} \tag{83}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \iff (a^{1/p})^{1/q} = a^{\frac{1}{pq}} \iff \sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a} \tag{84}$$

$$(a^n)^m = a^{nm} \iff (a^{1/p})^m = a^{\frac{m}{p}} \iff (\sqrt[p]{a})^m = \sqrt[p]{a^m} \tag{85}$$

$$a^n a^m = a^{n+m} \iff a^{1/p} a^{1/q} = a^{1/p+1/q} = a^{\frac{q+p}{pq}} \iff \sqrt[p]{a}\sqrt[q]{a} = \sqrt[pq]{a^{q+p}} \tag{86}$$

7 Aplicación de las potencias a las finanzas. Porcentajes. Interés simple y compuesto

7.1 Porcentajes. Encarecimiento o rebaja de un precio

7.2 Interés simple

7.3 Interés compuesto