I.E.S. Virgen de la Calle

Departamento de Matemáticas

Matemáticas para las Ciencias Sociales II

Apuntes

Javier Martín García

26 de noviembre de 2024

Introducción

[...]

Estructura de los apuntes

El objetivo de estos apuntes no es proporcionar una recopilación de resultados, fórmulas y recetas, pero evidentemente será útil que tengamos una forma de encontrar rápidamente las definiciones más importantes, los teoremas relevantes o pequeños ejemplos de aplicación. Con esa finalidad, se ha introducido una serie de 'cajas' de colores que permitan organizar ese tipo de información. Así pues, siempre que definamos un concepto importante utilizaremos una caja de color verde como la siguiente

• Definición: Número par

Diremos que un cierto número natural n es par, si es múltiplo de 2, es decir, si existe otro número natural p tal que $n = 2 \cdot p$.

Una vez definidos los conceptos, encontraremos resultados o propiedades que se cumplirán siempre bajo ciertas condiciones. A este tipo de resultados se les suele llamar 'lemas' o 'teoremas'. En estos apuntes utilizaremos la segunda denominación y encuadraremos aquellos teoremas importantes en una caja de color azul oscuro

• Teorema 0.1: suma de números pares

Sean m y n dos números naturales pares. Entonces su suma $m + n$ es también un número par.

Ningún teorema se puede considerar como tal si no se ha demostrado que es cierto. En el curso que nos ocupa no nos podremos permitir el lujo de demostrar todos los resultados de forma rigurosa, pero sí muchos de ellos (como mínimo de forma heurística). Cuando un teorema se presente con su demostración usaremos una caja de color azul algo más claro

• Demostración 0.1: suma de números pares

Dado que m es par entonces tendrá que existir algún número natural p tal que $m = 2p$. Análogamente, existirá un q tal que $n = 2q$. Realizando por tanto la suma tenemos

$$m + n = 2p + 2q = 2(p + q) \tag{0.1}$$

y dado que $p + q$ será natural resulta evidente que $m + n$ será múltiplo de 2, o lo que es lo mismo: par. $\square$

Las definiciones y teoremas son bonitos es interesantes porque son resultados muy generales que se pueden aplicar a una infinidad de casos. Por ese motivo se suelen enunciar utilizando letras o parámetros de forma abstracta, pero en muchos casos eso puede hacer más difícil su comprensión. Un ejemplo concreto muchas veces es necesario para poder entender muchos conceptos y cuando mostremos uno lo haremos usando una caja de color amarillo.

• Ejemplo: suma de números pares

Supongamos que escojemos dos números pares, como por ejemplo el 6 y el 10. En efecto, sabemos que son pares puesto que los podemos escribir como $6 = 2 \cdot 3$ y $10 = 2 \cdot 5$ respectivamente. Usando la propiedad distributiva calculamos su suma

$$6 + 10 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 8 = 16 \tag{0.2}$$

que como vemos es un número par.

Índice general

Parte I

ANÁLISIS

CAPÍTULO 1

Funciones. Límites y derivadas

1.1. Introducción

1.2. Repaso del concepto de función

Es habitual que en los planes de estudio de secundaria se hable directamente de funciones reales de variable real, o "eso de las x" pero lo cierto es que el concepto de función es algo mucho más general, más abstracto, pero en el fondo incluso más fácil de entender para cuando las funciones no hablan de números. Vamos a dar una definición general y luego veremos algunos ejemplos para poder entender el concepto de verdad.

• Definición: Función

Dados dos conjuntos A y B, una función[a] *es una correspondencia entre elementos de A y B, de tal manera que se cumple que a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.*

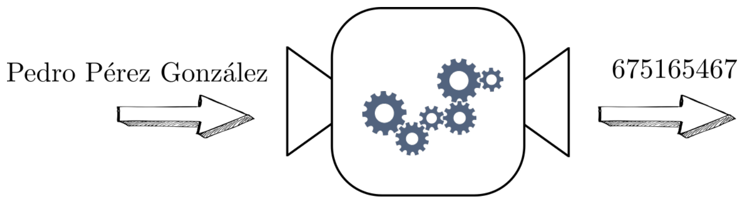
[a]También llamada a veces *aplicación* o *mapeo*

Después de esta definición es posible que te estés preguntando si no hemos ido de mal en peor. Efectivamente, se trata de una definición abstracta pero lo vas a entender en seguida con algunos ejemplos. Imaginemos los dos conjuntos siguientes

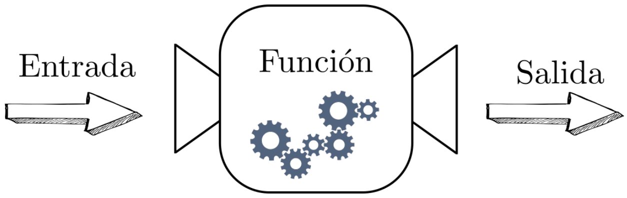
$$A = \{\text{Alumnos de clase}\} \tag{1.1}$$

$$B = \{\text{Números de teléfono}\}\,, \tag{1.2}$$

y supongamos ahora que existe una 'máquina' capaz de respondernos el teléfono de cualquier alumno que le preguntemos. Podemos representar esta máquina como una caja con dos agujeros: uno por el que metemos una cierta entrada o 'input' (en nuestro caso el nombre de un alumno) y otro por el que nos devolverá la salida o 'output' (en este caso su número de teléfono). El esquema sería el siguiente:



Por si queda alguna duda, no nos importa cómo funciona la máquina por dentro. Quizá es digital, quizá analógica o quizá la máquina es una persona que ha memorizado todos los números de teléfono de la clase. Todo eso nos da igual. Lo importante es que sabe emparejar a cada alumno con un sólo número de teléfono (el suyo) y eso convierte a esa máquina en una función. Vuelve a leer la definición de arriba hasta que te convenzas de que la has entendido. En el caso más general los conjuntos de partida y llegada pueden ser cualquier cosa que nos imaginemos: una función puede asignar cada gato a su dueño, cada país a su bandera, cada frecuencia a su nota musical o cada libro a su autor. Todas estas son funciones y (aunque no te lo parezca) todas son objeto de estudio de las matemáticas aunque no hablen de números, de modo que el esquema más general que podemos imaginar para una función es simplemente una máquina que transforma cada entrada en una salida.

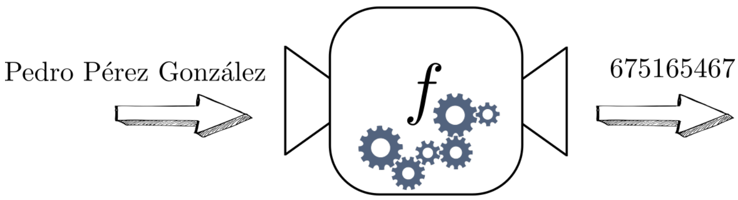


1.2.1. Dominio e imagen de una función

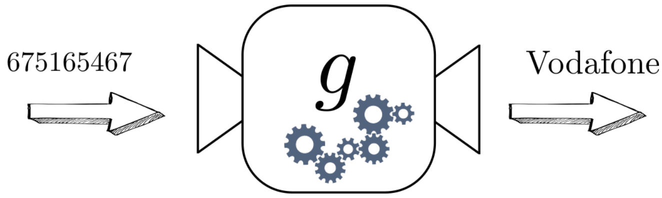
1.2.2. Composición de funciones. Función inversa

Una vez que nos adentramos en el apasionante mundo de las funciones es interesante estudiar qué tipo de cosas podemos hacer con ellas. Lo cierto es que existen varias cosas interesantes que podemos hacer con las funciones pero la más interesante es una operación que llamaremos *composición de funciones*.

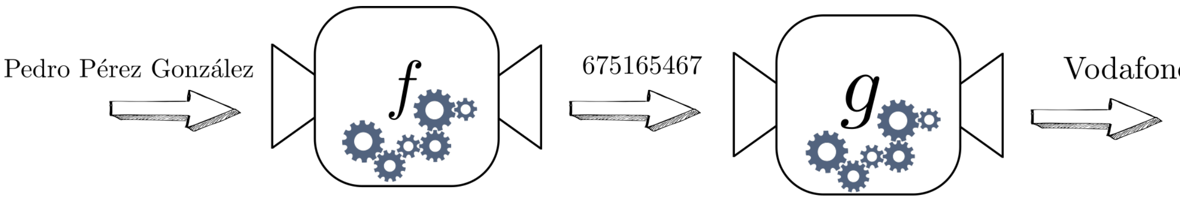
La noción de componer dos funciones es bastante sencilla: es la idea de usar el output de una función como input de otra. Será mejor verlo en un ejemplo: volvamos a la función que inventamos hace algunos párrafos (la que asignaba teléfonos a nombres). A partir de ahora vamos a hablar de varias funciones a la vez, así que será mejor que le demos un nombre para poder referirnos a ella, por ejemplo f



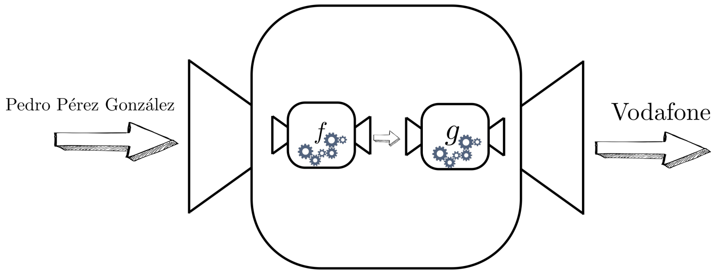
Bien. Imaginemos ahora que inventamos otra función (que vamos a llamar g) que hace lo siguiente: toma como entradas números de teléfono y nos devuelve el nombre de la compañía que gestiona ese contrato



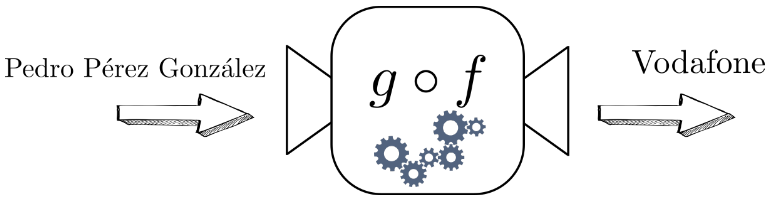
pues bien, parece bastante intuitivo que uno podría poner las dos máquinas en serie ¿verdad? Si hacemos que la salida de la primera función sea la entrada de la segunda entonces podremos introducir cada nombre a esta combinación de funciones y nos devolverá la compañía de teléfonos de esa persona



Esto que acabamos de hacer (poner dos funciones 'en serie' una detrás de otra) se llama *componer* funciones y podemos hacerlo siempre que tenga sentido, es decir, siempre que el conjunto de salidas de la primera función coincida con el de entradas de la segunda. DIcho de otra forma, siempre que el dominio de g coincida con la imagen de f. Evidentemente no tendría sentido componer la función f con una función que asigna a cada país su bandera, puesto que un número de teléfono no es un país. Una cosa interesante de componer funciones es que es una manera de crear nuevas funciones. En efecto, componiendo f y g hemos creado una nueva función que asigna compañías de teléfono a cada persona, de modo que podemos pensar en la unión de las dos 'máquinas' como una nueva 'máquina'.



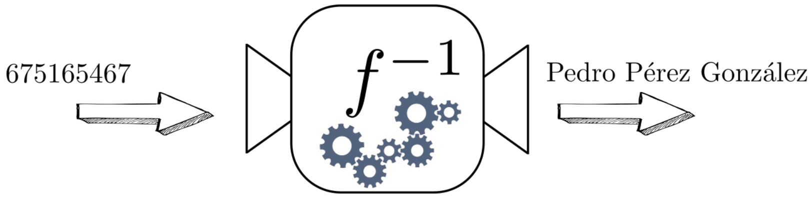
Existe una nomenclatura estándar para referirse a este tipo de funciones, que es la notación $g \circ f$, y que se lee 'f compuesta con g' [1].



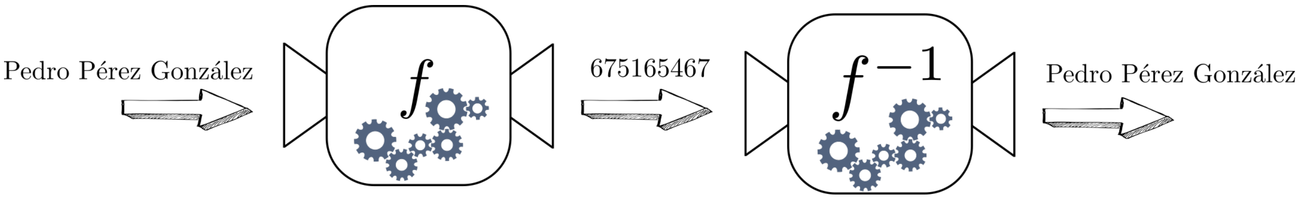
Antes de terminar con esta parte tan abstracta de las funciones, nos falta un último concepto por introducir: la función inversa. Imaginemos de nuevo que estamos trabajando con la función f que nos da los números de teléfono de cada alumno. Una pregunta interesante es: ¿podemos hacer funcionar la máquina 'al revés'? Es decir, ¿sería posible invertir el sentido de tal modo que la máquina reciba números de teléfono como entrada y nos devuelva a sus dueños como salida? Efectivamente, podemos imaginar una máquina que haga exactamente esto, y esto es precisamente a lo que llamaremos función inversa de f y la denotaremos como f^{-1}. [2]

[1] Efectivamente, el orden es el inverso al que uno esperaría, leyendo de derecha a izquierda. Aunque esto parezca confuso tiene su sentido , que veremos más tarde.

[2] La notación es un poco desafortunada porque puede inducirnos a pensar que $f^{-1} = \frac{1}{f}$ pero no es así. En este caso el $^{-1}$ indica simplemente una inversión en el sentido de funciones. El origen de la notación tiene un sentido que veremos en seguida pero reconozco que puede inducir a error...



Una consecuencia inmediata de esto es que si ponemos f y f^{-1} en serie (es decir, si las componemos) una máquina 'deshará' el trabajo hecho por la otra, devolviéndonos como salida exactamente lo que metimos en la entrada



en definitiva, la función compuesta $f^{-1} \circ f$ es la función que 'no hace nada' (devuelve la misma salida que entrada) y que usualmente se conoce como 'función identidad' o $\mathbb{1}$. De hecho, esta es la definición estricta de una función inversa:

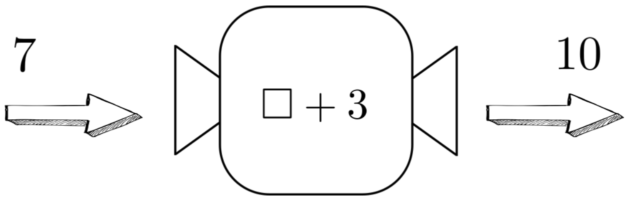
• Definición: Función inversa f^{-1}

Llamamos función inversa f^{-1} de otra función f a aquella que cumple $f^{-1} \circ f = \mathbb{1}$

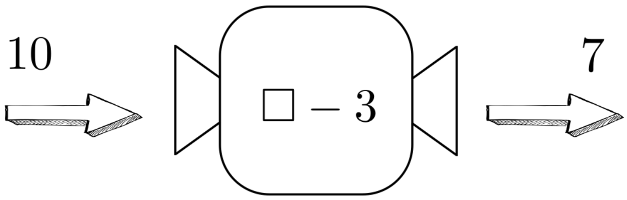
1.3. Funciones reales de variable real

En la sección anterior hemos visto que una función es un concepto muy general: una simple correspondencia entre elementos de dos conjuntos pero no hemos hablado mucho de números (más que de números de teléfono). Y es que las matemáticas son *mucho* más que números, pero por supuesto que estos también son importantes y es muy interesante estudiar las funciones que relacionan unos números con otros. A estas alturas de tu educación ya conoces funciones relativamente complicadas, pero aún así empezaremos por las más sencillas que existen.

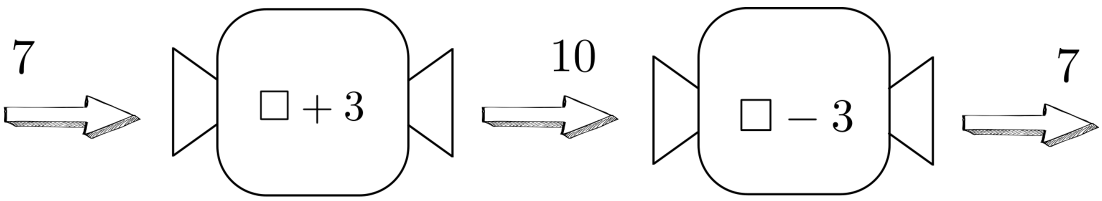
Imaginemos en primer lugar a la función que empareja cada número con otro 3 unidades mayor. Evidentemente esta es la función que realiza la operación de 'sumar 3' y nos relaciona elementos del conjunto de los números reales con otros elementos del mismo conjunto [3]



Bien, ¿cuál es entonces la función que es capaz de 'deshacer' el trabajo de esta? O con términos más pecisos ¿cuál sería la función inversa a sumar 3? Efectivamente: la función que resta esa misma cantidad



y, evidentemente si componemos ambas tendremos la identidad



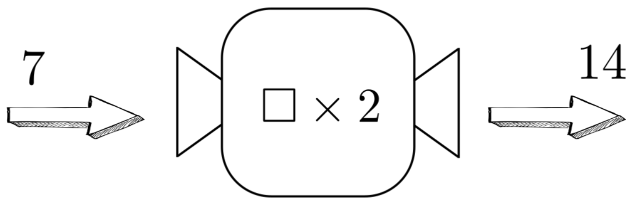
[3] Aunque no vimos ejemplos de esto en la sección anterior, esto es perfectamente posible. Por ejemplo, podríamos imaginar la función que relaciona a cada alumno con el compañero de la mesa de al lado. Se trataría de una función que tiene el mismo conjunto de elementos de entrada y salida: los alumnos.

Con esto hemos visto en el lenguaje de funciones algo que en cierto modo ya sabíamos, y es que la resta no es ni más ni menos que la operación inversa a la suma. De hecho, si la queremos definir con palabras nos encontramos con que necesitamos una especie de voltereta lingüística

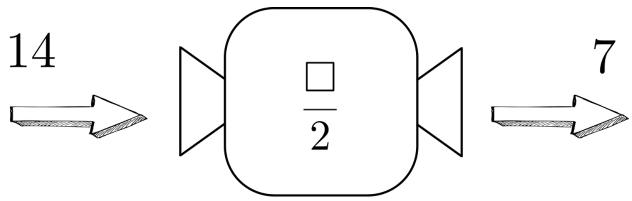
El número $y = x - p$ es aquel número tal que cuando le sumamos p obtenemos x, es decir, que cumple $y + p = x$.

que no es ni más ni menos que una forma de decir que la resta es la operación inversa de la suma.

Vamos con un ejemplo más: imaginemos ahora la función que empareja a cada número real con con el doble de éste. Evidentemente esta es la función que multiplica por 2 y podemos representarla en nuestros dibujos como sigue



y evidentemente la función inversa será aquella que divide cada número por 2



de modo que vemos que la división es la operación inversa a la multiplicación.

[...]

1.3.1. Ejemplos. Dominio e imagen de algunas funciones reales

1.3.2. Composición de funciones reales. Funciones inversas

1.3.3. Operaciones con funciones reales.

1.4. Límites de funciones reales de variable real. Continuidad

1.4.1. Límite finito en un punto finito

1.4.2. Continuidad de una función en un punto

• Definición: continuidad de una función en un punto

Sea $f(x)$ una función y x_0 un punto de su dominio. Entonces diremos que ***$f(x)$ es continua en x_0*** *si y sólo si se cumplen las dos condiciones siguientes:*

- *Existe el límite* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
- *Dicho límite además coincide con el valor de f en x_0, es decir* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En caso contrario diremos que la función es discontinua o que presenta una discontinuidad en x_0.

1.4.3. Límite infinito en un punto finito

El infinito. Recta real extendida y operaciones básicas con el infinito.

Conjunto extendido de los reales Denotaremos $\bar{\mathbb{R}}$ al conjunto extendido de los reales $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, que resulta de añadir a $\mathbb{R}$ los 'puntos del infinito' con el significado habitual. Las reglas aritméticas usuales en $\mathbb{R}$ se extenderán parcialmente en $\bar{\mathbb{R}}$, de tal modo que si $a \in \bar{\mathbb{R}}$ se definen las siguientes reglas

$$a \pm \infty = \pm\infty \quad \forall a \neq \mp\infty\,, \tag{1.3}$$

$$a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \quad \forall a > 0\,, \tag{1.4}$$

$$a \cdot (\pm\infty) = \mp\infty \quad \forall a < 0\,, \tag{1.5}$$

$$\frac{a}{\pm\infty} = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}\,, \tag{1.6}$$

$$\frac{\pm\infty}{a} = \pm\infty \quad \forall a > 0\,, \tag{1.7}$$

$$\frac{\pm\infty}{a} = \mp\infty \quad \forall a < 0\,. \tag{1.8}$$

Además, existirán casos en los que el resultado no estará bien definido, como son expresiones del tipo $0/0$, ∞/∞, $0 \cdot (\pm\infty)$ o $\infty - \infty$. En estos casos se dice que el resultado se encuentra en forma indeterminada, y en los casos que nos ocuparán serán necesarias otras técnicas para determinar el valor del mismo.

1.4.4. Límites en el infinito

1.4.5. Clasificación de discontinuidades

En la sección 1.4 vimos la definición de continuidad de una función en un punto, que si recordamos requería de las siguientes condiciones

- Existencia del límite en ese punto.
- Que dicho límite coincida con el valor de la función en dicho punto.

A la vista de estas condiciones, no obstante, no es difícil darse cuenta de que una función puede 'fallar' en ser continua por motivos diferentes. Por ejemplo, podría ocurrir que el límite exista pero que éste no coincida con el valor de la función, o podría ocurrir que el límite ni siquiera exista por diversos motivos. Explorando esta casuística, es habitual clasificar las discontinuidades en dos familias, la segunda de las cuales se subdivide a su vez en dos casos [4]

- Discontinuidades evitables
- Discontinuidades de salto
  - De salto finito
  - De salto infinito

A continuación describiremos estos casos uno por uno.

Discontinuidad evitable

Diremos que tenemos una discontinuidad evitable en aquellos casos en los que la función tiene límite en el punto de estudio, pero este no coincide con el valor de la misma.

• Definición: Discontinuidad evitable

Sea $f(x)$ una función y a un punto en su dominio, diremos que f tiene una discontinuidad evitable en a si

- Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

Habitualmente se trata de funciones a las que se les ha quitado explícitamente un punto, que ha sido 'movido' a otro lugar, como podemos ver en la figura 1.3

[4] Existen otros tipos de situaciones pero no son objetivo de este curso.

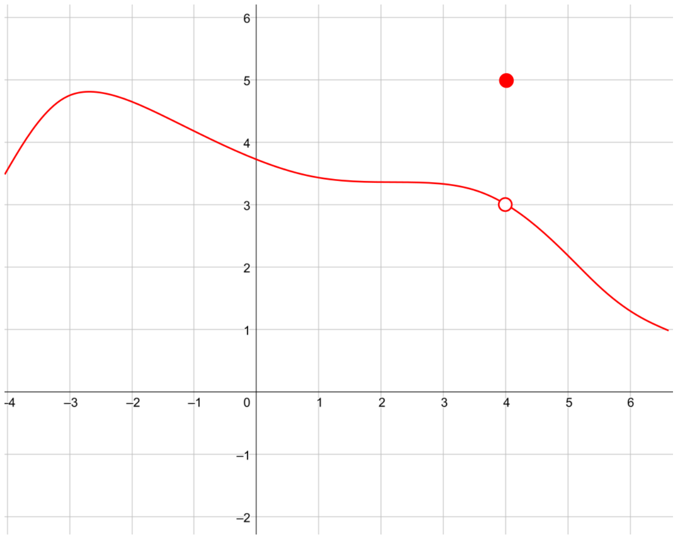


Figura 1.1: *Como vemos en este ejemplo, la función en cuestión tiene límite en* $x = 4$*, pero este no coincide con el valor de la función en dicho punto. En otras palabras* $\lim_{x\to 4} f(x) = 3 \neq f(4) = 5$

Mirando a la figura anterior podemos intuir por qué se llama 'evitables' a este tipo de continuidades, puesto que parece muy intuitivo que bastaría con mover un sólo punto de la función para 'arreglar' la discontinuidad[5].

• Ejemplo: función con una discontinuidad evitable

Para ver un ejemplo analítico de este tipo de discontinuidades basta con inventarnos una función y mover uno de sus puntos. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x & \text{si } x \neq 5 \\ 50 & \text{si } x = 5 \end{cases} \tag{1.9}$$

[5] Aunque sea tentador, lo contrario de las discontinuidades evitables no son las discontinuidades *inevitables*, que es un término que no se utiliza en este contexto. El origen del término es histórico y yo no soy quién para cuestionarlo, pero puede dar lugar a este tipo de confusiones.

Como vemos, resulta evidente que el límite existe y en particular $\lim_{x\to 5} f(x) = 115$ pero no coincide con $f(5) = 50$.

Discontinuidad de salto

Diremos que tenemos una discontinuidad de salto en aquellos casos en los que existen los límites laterales en el punto de estudio pero estos no coinciden entre sí. Si ambos son finitos diremos que se trata de un salto finito, mientras que si alguno de esos límites es infinito diremos que nos encontramos ante un salto infinito.

• Definición: Discontinuidad de salto finito

Sea $f(x)$ una función y a un punto en su dominio, diremos que f tiene una discontinuidad de salto finito en a si

- No existe $\lim_{x\to a} f(x)$ pero sí existen los dos límites laterales $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$
- Ambos límites son finitos

Habitualmente se trata de funciones definidas a trozos, pero que se comportan de modo 'normal' en torno al punto de estudio (es decir, que no divergen ni tienen otro comportamiento extraño).

• Ejemplo: función con una discontinuidad de salto finito

Para ver un ejemplo analítico de este tipo de discontinuidades basta con inventarnos una función a trozos. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & \text{si } x \leq 2 \\ x + 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} \tag{1.10}$$

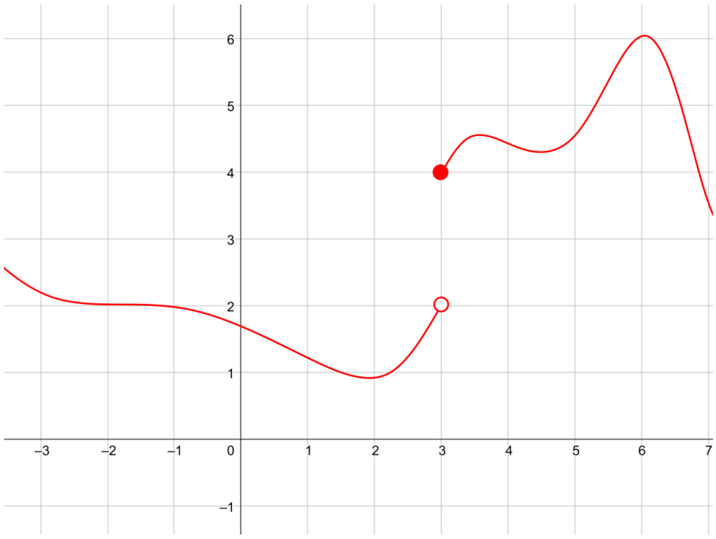


Figura 1.2: *Como vemos en este ejemplo, la función en cuestión no tiene límite en* $x = 3$*, pero sí existen los límites laterales. En particular tendremos* $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2$ *y* $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 4$*. Ambos son finitos, pero diferentes, por lo que se trata de una discontinuidad de salto finito.*

Resulta evidente que los límites laterales en $x = 2$ existen y en particular $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 10$ y $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$ pero, como vemos, no coinciden.

• Definición: Discontinuidad de salto infinito

Sea $f(x)$ una función y a un punto en su dominio, diremos que f tiene una discontinuidad de salto infinito en a si

- Existen los dos límites laterales $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y $\lim_{x \to a^+} f(x)$
- Alguno de los dos límites (o ambos) son infinitos.

Habitualmente se trata de funciones definidas a trozos, en las cuales al menos uno de ellos presenta un comportamiento singular (diverge) en el punto estudiado.

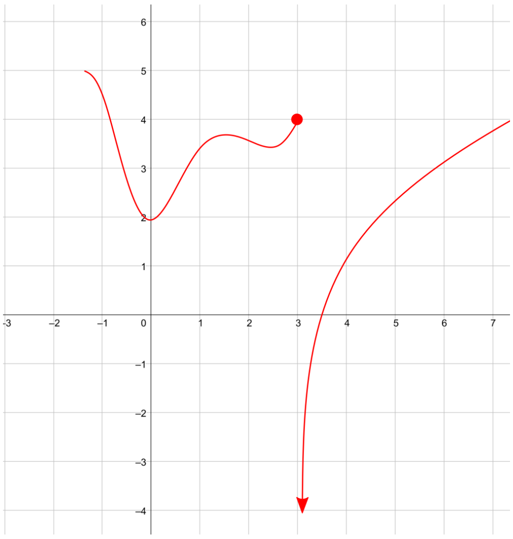


Figura 1.3: *Como vemos en este ejemplo, la función en cuestión no tiene límite en* $x = 3$*, pero sí existen los límites laterales. En particular tendremos* $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$ *y* $\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$*. Dado que uno de ellos es infinito decimos que se trata de un salto infinito.*

• Ejemplo: función con una discontinuidad de salto infinito

Para ver un ejemplo analítico de este tipo de discontinuidades basta con inventarnos una función a trozos en la que uno de ellos diverja. Por ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{1.11}$$

En este caso, los límites laterales en $x = 0$ existen y en particular $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 5$ y $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ pero, como vemos, no coinciden y uno de ellos es infinito.

1.5. Derivada de una función

Como hemos visto en la sección anterior, el concepto de límite es muy útil para estudiar el comportamiento de las funciones en sitios 'especiales' en los que sospechamos que pueda haber discontinuidades, asíntotas u otros comportamientos anómalos.

La aplicación más útil de los límites, no obstante, no es esta. Y es que el concepto de límite nos va a permitir construir el concepto de *derivada*, una propiedad de las funciones que nos va a dar mucha información sobre las mismas y que nos abre las puertas a multitud de aplicaciones, como la optimización, el estudio de la monotonía o el de los extremos locales de una función. La noción de derivada será la puerta de entrada a una nueva rama del análisis matemático que llamaremos *cálculo diferencial*, que utiliza este y otros conceptos para el estudio de funciones 'suaves' [6].

1.5.1. Derivada de una función en un punto. Interpretación geométrica

Existen varias definiciones equivalentes de lo que es la derivada de una función en un punto. En estos apuntes optaré por empezar con la definición geométrica, y trataremos a partir de ella de dar con una definición más analítica.

Supongamos en primer lugar que tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y suave en su dominio y un cierto punto $x = x_0$ de dicho dominio. En este caso

• Definición: Derivada de $f(x)$ en x_0

Llamaremos *derivada de la función* $f(x)$ *en el punto* x_0, y la denotaremos como $f'(x_0)$ a la pendiente de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

De esta definición podemos intuir por qué pedíamos que la función $f(x)$ sea 'suave', puesto que esta noción intuitiva es la que nos garantiza que tenga sentido hablar de rectas tangentes. Cuando

[6] Es difícil definir el concepto de 'suave' sin caer en un argumento circular, pero intuitivamente podemos pensar en que cualquier función continua y sin 'picos'o 'esquinas' es lo que llamaremos una función suave.

tenemos funciones que presentan 'esquinas' la tangente no tiene sentido en ese punto y por lo tanto no lo tendrá la noción de derivada.

Una imagen vale más que mil palabras, así que vamos a ver algunos ejemplos de derivadas para algunas funciones y puntos.

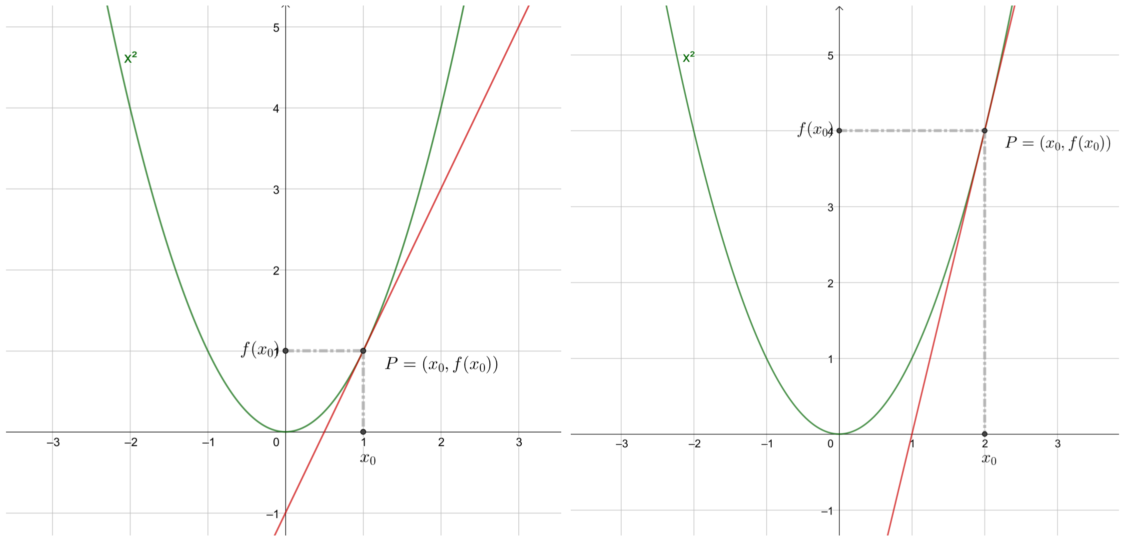


Figura 1.4: *Dos ejemplos para la función $f(x) = x^2$. Tras haber trazado las rectas tangentes, podemos calcular su pendiente simplemente contando en la cuadrícula y recordando que la pendiente de una recta es $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Así pues, observando el dibujo concluimos la derivada de x^2 en el punto $x_0 = 1$ es 2 , mientas que en el punto $x_0 = 2$ será 4. Dicho con otras palabras, $f'(1) = 2$ y $f'(2) = 4$.*

Bien, con esto ya tenemos una primera defınción de lo que es una derivada, pero presenta varios inconvenientes a nivel práctico:

- Se trata de una definición muy intuitiva si disponemos de la gráfica de la función, pero ¿qué ocurre si no la tenemos? Si tengo que calcular la derivada de $f(x) = \cos(x^2) + \log(x)$ ¿necesito pintar la función primero?
- Incluso si dispongo de la gráfica no tiene por qué ser siempre sencillo encontrar con precisión la recta tangente ni su pendiente.

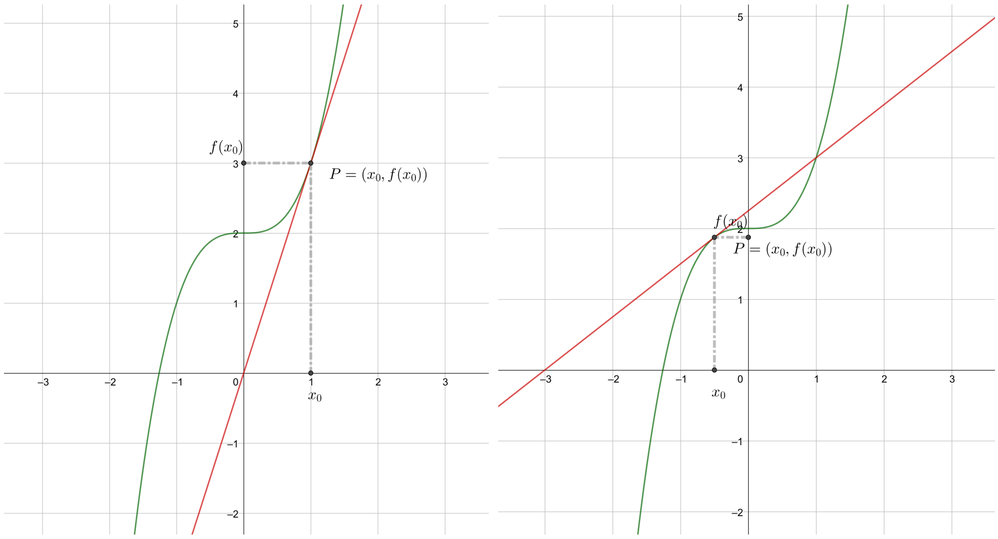


Figura 1.5: *Dos ejemplos para la función* $f(x) = x^3+2$*. De nuevo, observando el dibujo concluimos la derivada de* $f(x)$ *en el punto* $x_0 = 1$ *es 3 , mientas que en el punto* $x_0 = -\frac{1}{2}$ *será* $\frac{5}{4}$*. Dicho con otras palabras,* $f'(1) = 3$ *y* $f'(-1/2) = \frac{5}{4}$.

Efectivamente, no parece muy razonable que dependamos de la precisión de nuestro papel milimetrado para hallar la derivada de una función, de modo que será conveniente que busquemos un procedimiento analítico que nos permita calcular la derivada sin pasar por métodos gráficos. Como veremos en pocas líneas, calcular una derivada sólo requiere un sencillo límite, pero tendremos que motivar primero el por qué del mismo.

El problema que nos encontramos es el siguiente: disponemos de una cierta función $f(x)$ y un punto $P = (x_0, f(x_0))$ que pertenece a su gráfica, y deseamos encontrar la pendiente de la recta tangente a f que pasa por el punto P. A priori, el problema no es trivial, de modo que nos conformaremos en un primer paso con resolver un problema similar.

- Dados dos puntos P y Q, ambos pertenecientes a la gráfica de $f(x)$. ¿Cuál es la pendiente de la recta que pasa por ambos?

[...] La explicación debe continuar, pero es esencialmente la que os di en el vídeo

• Definición: Derivada de $f(x)$ en x_0 (v. II)

Llamaremos *derivada de la función* $f(x)$ *en el punto* x_0, y la denotaremos como $f'(x_0)$ al siguiente límite

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1.12}$$

Veamos un ejemplo de cómo calcular una derivada de una función sencilla usando esta definición:

• Ejemplo: Derivada de la función $f(x) = x^2$ en $x_0 = 3$

Simplemente usando la definición de derivada tenemos

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(3+h)^2 - 3^2}{h} \tag{1.13}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3^2 + h^2 + 6h - 3^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 6h}{h} \tag{1.14}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h+6)}{h} = \lim_{h\to 0} (h+6) = 6 \tag{1.15}$$

1.5.2. Función derivada

Derivadas de las funciones elementales

1.5.3. Propiedades básicas de la derivación. Regla de la cadena

• Teorema 5.1: derivada de una suma

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables, entonces

$$(f \pm g)'(x) = \big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x) \tag{1.16}$$

• Demostración 5.1: derivada de una suma

Simplemente usando la definición de derivada vemos que el límite actúa linealmente en las sumas, es decir

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} && (1.17)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) + g(x+h) - f(x) - g(x)}{h} && (1.18)\\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) && (1.19)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} && (1.20)\\
&= f'(x) + g'(x) && (1.21)
\end{aligned}$$

El caso de la resta es completamente análogo y se deja como ejercicio.

• Teorema 5.2: derivada de un producto por constantes

Sea $f(x)$ una función derivable y $\lambda \in \mathbb{R}$ un parámetro constante, entonces

$$(\lambda f)'(x) = \big(\lambda f(x)\big)' = \lambda f'(x) \tag{1.22}$$

• Demostración 5.2: derivada de un producto por constantes

Usando la definición de derivada y las propiedades de los límites simplemente

$$\begin{aligned}
(\lambda f)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(\lambda f)(x+h) - (\lambda f)(x)}{h} && (1.23)\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\lambda f(x+h) - \lambda f(x)}{h} && (1.24)\\
&= \lambda \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lambda f'(x) && (1.25)
\end{aligned}$$

El teorema • Teorema 5.1

• Teorema 5.3: derivada de un producto de funciones

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables, entonces

$$(f\cdot g)'(x) = \big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \tag{1.26}$$

• Demostración 5.3: derivada de un producto de funciones

Usando la definición de derivada tenemos

$$\begin{aligned}
(f\cdot g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x+h) - (f\cdot g)(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\big[f(x+h) - f(x)\big] + f(x)\big[g(x+h) - g(x)\big]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} g(x+h)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + f(x)\cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

• Teorema 5.4: derivada de la composición: Regla de la cadena

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables [a]*, entonces*

$$(f \circ g)'(x) = \left[f\left(g(x)\right)\right]' = f'(g(x))g'(x)\,. \tag{1.27}$$

[a]Técnicamente tendríamos que pedir que $g(x)$ sea derivable en el punto x y que $f(x)$ lo sea en el punto $g(x)$.

• Demostración 5.4: derivada de la composición: Regla de la cadena

Usando la definición de derivada tenemos [a]

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{g(x+h)-g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\
&= f'(g(x))g'(x)\,.
\end{aligned}$$

donde en el último paso hemos utilizado que $g(x+h)-g(x)$ es una cantidad pequeña que nos permite asimilar el límite al de la derivada. Más conceretamente, si denotamos $y = g(x+h)$ y $y_0 = g(x)$ entonces es evidente que cuando $h \to 0$ se tiene $y \to y_0$ y podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} = \lim_{y\to y_0} \frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0} = f'(y_0)\,.$$

[a]Esta no es una demostración completamente rigurosa pero será suficiente para nuestro nivel. Una demostración completa se puede encontrar en [?]

• Teorema 5.5: derivada de un cociente

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones derivables. En todos aquellos puntos tales que $g(x) \neq 0$ tendremos

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \tag{1.28}$$

• Demostración 5.5: derivada de un cociente

Si pensamos en el cociente como un producto, podemos demostrar esta fórmula sencillamente usando la regla de la cadena. En particular

$$\begin{aligned} \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} + f(x) \cdot \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\ &= f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

donde simplemente hemos usado que $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ y la regla de la cadena.

1.5.4. Derivadas de las funciones elementales

1.5.5. Aplicación de la derivación al cálculo de límites: regla de l'Hopital

CAPÍTULO 2

Estudio global de funciones. Representación gráfica.

2.1. Introducción

2.2. Aspectos generales de una función real

2.2.1. Dominio e imagen de una función

Tal y como ya vimos en la introducción 2.1, no siempre va a tener sentido evaluar una cierta función para los elementos que queramos. En el ejemplo que pusimos, la función f nos da el teléfono de cada alumno de la clase, pero no tendrá sentido preguntarle a esta función cuál es el teléfono de la Luna, o el de la pata de una silla.

De este mismo modo, cuando construimos funciones para el conjunto de los números reales tenemos que tener en mente que estas no tienen por qué estar bien definidas para todos los números. El motivo de esto puede tener dos orígenes

- Podría ocurrir que simplemente elijamos definir nuestra función sólo para algunos números. Por ejemplo, podríamos definir la función

$$f(x) = x^2 \text{ si } x > 5 \tag{2.1}$$

cosa que es perfectamente válida. En este caso, el dominio de f por tanto será $(5, \infty)$ y para números menores al 5 simplemente no estará definida.

- El otro motivo es que (aunque no lo especifiquemos de forma explícita) existan números para los cuales a alguna de las operaciones de la función no tienen sentido. Este sería el caso de la función $\frac{1}{x}$ o de la función $\sqrt{x}$, en las cuales las operaciones no están definidas para algunos valores de x. En particular, no se puede dividir por cero, ni existe la raíz de un número negativo, lo que nos dice que

$$\mathrm{dom}\left(\frac{1}{x}\right) = \mathbb{R} - \{0\} \tag{2.2}$$

$$\mathrm{dom}\left(\sqrt{x}\right) = \mathbb{R}^+ = [0, \infty) \tag{2.3}$$

• Definición: Dominio de una función de variable real

Llamamos *dominio* de una función de variable real $f(x)$ al subconjunto de $\mathbb{R}$ para el cual la función está definida. En ocasiones lo denotaremos como $\mathrm{Dom}(f)$.

• Definición: Imagen o recorrido de una función de variable real

Llamamos *imagen* o *recorrido* de una función real $f(x)$ al subconjunto de $\mathbb{R}$ que es el resultado de aplicar f a su dominio. En ocasiones lo denotaremos como $\mathrm{Im}(f)$.

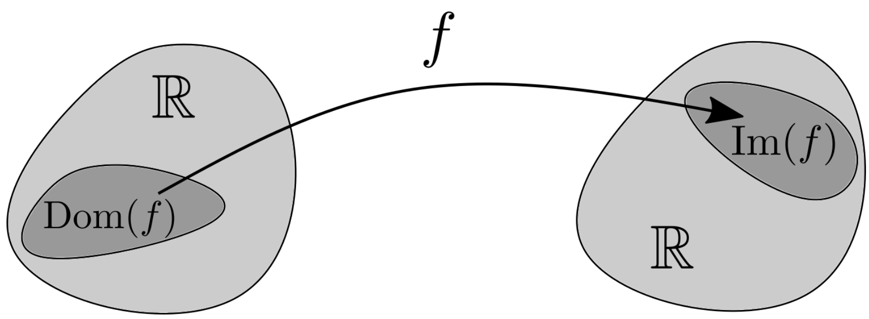


Figura 2.1: *Esquema del concepto de dominio e imagen de una función real.*

2.2.2. Simetrías

Una de las propiedades que puede tener una función es la de poseer *simetrías* o *invariancias*. En general, en matemáticas hablamos de que un objeto tiene una cierta simetría si existe algún tipo de operación que podemos realizar sobre ese objeto y que sin embargo deja al objeto como estaba (o al menos lo deja de una forma indistinguible a la original). Existen muchos tipos de simetrías, pero las más intuitivas son que surgen de operaciones geométricas: imaginemos por ejemplo que tenemos un folio en blanco encima de la mesa. Si pensamos un minuto en ello, nos daremos cuenta de que ese folio tiene 4 posiciones equivalentes o indistinguibles: podemos girar el folio 180 grados sobre su centro o podemos darle la vuelta con respecto a dos ejes diferentes (horizontal y vertical, ambos también pasando por el centro). La primera operación nos dice que el folio tiene una simetría de giro, mientras que las otras se denominan simetrías de reflexión o axiales. La simetría axial es muy común en multitud de objetos en la naturaleza y las matemáticas, y será en la que nos centremos en el estudio de funciones.

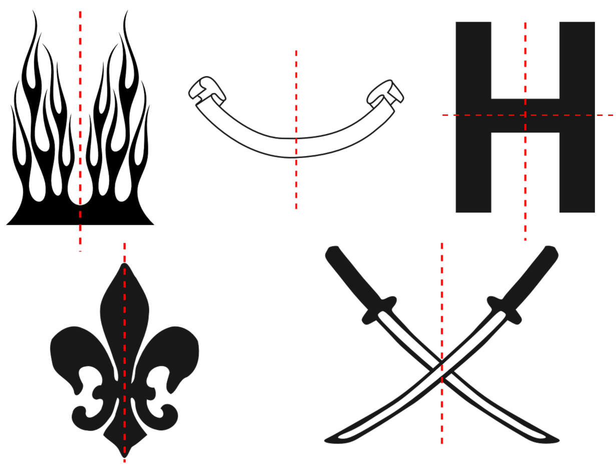


Figura 2.2: *Ejemplos de objetos que tienen simetría axial. En rojo se muestran los ejes de dichas simetrías.*

Simetrías axiales en funciones: funciones pares e impares

En efecto, una función puede tener una simetría axial con respecto a algún eje, pero nos centraremos aquí en aquellas funciones que son simétricas respecto a los ejes coordenados.

• Definición: Simetría par de una función

Diremos que una función $f(x)$ es *par* o *simétrica* si tiene una simetría axial con respecto al eje coordenado y, es decir, si se cumple

$$f(-x) = f(x) \tag{2.4}$$

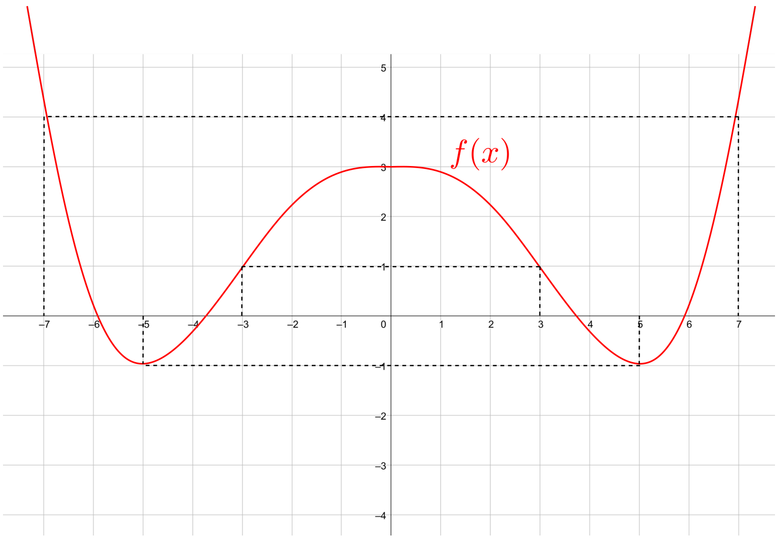


Figura 2.3: *En esta figura se muestra una función par. Geométricamente parece evidente que el eje y es un eje de simetría, pero es importante convencerse de que esa simetría es equivalente a la condición* (2.4).

• Definición: Simetría impar de una función

Diremos que una función $f(x)$ es *impar* o *antisimétrica* si tiene una simetría axial con respecto dos reflexiones sucesivas en los ejes coordenados x e y, es decir, si se cumple

$$f(-x) = -f(x) \tag{2.5}$$

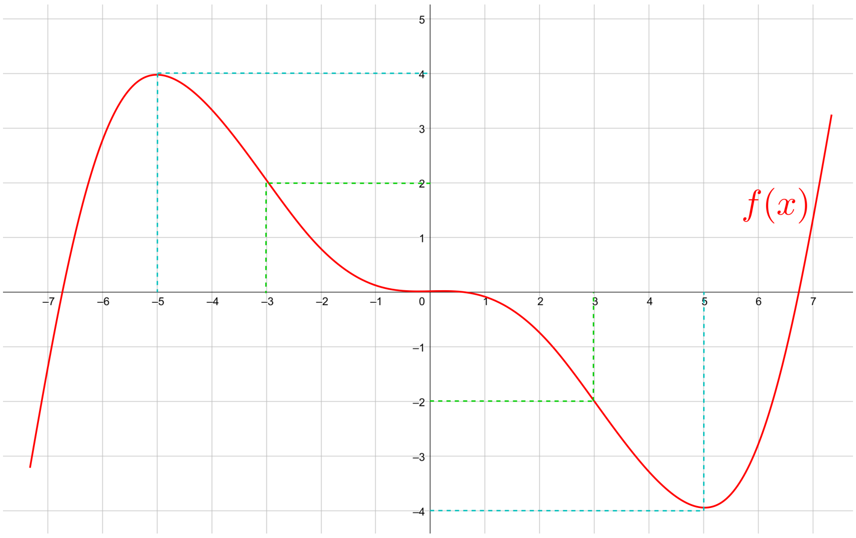


Figura 2.4: *En esta figura se muestra una función impar. Estudia el gráfico hasta convencerte de que las sucesivas reflexiones son equivalentes a la condición* (2.5)*.*

• Ejemplo: Simetría de funciones

Estudiemos la simetría de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^4 - 3x^2 + 2$
2. $g(x) = x^2 + 2x$
3. $h(x) = -x^5 + 3x^3 + 5x$
4. $k(x) = \dfrac{x^2 + 7}{3x}$

Para ello, simplemente tendremos que realizar el cambio $x \to -x$ y observar si el resultado tiene alguna relación con la función original. En efecto

1. $f(-x) = 5(-x)^4 - 3(-x)^2 + 2 = 5x^4 - 3x^2 + 2 = f(x)$
2. $g(-x) = (-x)^2 + 2(-x) = x^2 - 2x$
3. $h(-x) = -(-x)^5 + 3(-x)^3 + 5(-x) = x^5 - 3x^3 - 5x = -h(x)$
4. $k(-x) = \dfrac{(-x)^2 + 7}{3(-x)} = \dfrac{x^2 + 7}{-3x} = -\dfrac{x^2 + 7}{3x} = -k(x)$

de modo que concluimos que $f(x)$ es una función par, $h(x)$ y $k(x)$ son impares y $g(x)$ no posee simetrías.

Operaciones con funciones pares e impares

Aunque siempre es posible comprobar la simetría de cualquier función de forma explícita, existen algunas propiedades generales que pueden ser útiles a la hora de estudiar operaciones con funciones simétricas. En particular, es interesante ver cómo la suma y producto de este tipo de funciones tiene también estas propiedades. Veamos un par de resultados importantes:

• Teorema 2.1: Suma de funciones pares e impares

- La suma de funciones pares es par
- La suma de funciones impares es impar

• Demostración 2.1: Suma de funciones pares e impares

- Supongamos que $f(x)$ y $g(x)$ son funciones pares. La función suma es simplemente

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \tag{2.6}$$

y si comprobamos la simetría con el cambio $x \to -x$ obtenemos

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x) \tag{2.7}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la propiedad de $f(x)$ y $g(x)$ de ser pares, es decir que $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$. □

- Supongamos que $h(x)$ y $k(x)$ son funciones impares. Al igual que en la demostración anterior, podemos comprobar la simetría con el cambio $x \to -x$

$$(h+k)(-x) = h(-x) + k(-x) = -h(x) - k(x) = -(h+k)(x) \tag{2.8}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la propiedad de $h(x)$ y $k(x)$ de ser impares, es decir que $h(-x) = -h(x)$ y $k(-x) = -k(x)$. □

• Teorema 2.2: Producto de funciones pares e impares

- El producto de dos funciones pares es par.
- El producto de dos funciones impares es par.
- El producto de una función par y otra impar es impar.

• Demostración 2.2: Producto de funciones pares e impares

Supongamos$f(x)$ y $g(x)$ son funciones pares, mientras que $h(x)$ y $k(x)$ son funciones impares

- Realizando el producto de las dos funciones pares y comprobando la simetría con el cambio $x \to -x$ tenemos

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x) \tag{2.9}$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la propiedad de $f(x)$ y $g(x)$ de ser pares, es decir que $f(-x) = f(x)$ y $g(-x) = g(x)$. □

- Realizando el producto de las dos funciones impares y comprobando la simetría con el cambio $x \to -x$ tenemos

$$(h \cdot k)(-x) = h(-x) \cdot k(-x) = (-h(x)) \cdot (-k(x)) = h(x) \cdot k(x) = (h \cdot k)(x) \quad (2.10)$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la propiedad de $h(x)$ y $k(x)$ de ser impares, es decir que $h(-x) = h(x)$ y $k(-x) = k(x)$ y en la tercera igualdad hemos usado simplemente que $(-1) \cdot (-1) = 1$ $\square$

- Realizando el producto de una función par y otra impar y comprobando la simetría con el cambio $x \to -x$ tenemos

$$(f \cdot h)(-x) = f(-x) \cdot h(-x) = f(x) \cdot (-h(x)) = -f(x) \cdot h(x) = -(f \cdot h)(x) \quad (2.11)$$

donde en la segunda igualdad hemos usado la propiedad de $f(x)$ de ser par y la de $h(x)$ de ser impar. $\square$

Simetría de traslaciones: periodicidad

• Definición: Función periódica

Diremos que una función $f(x)$ es *periódica* si existe algún número $T \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x+T) = f(x) \quad (2.12)$$

y en este caso diremos que T es el *período* de $f(x)$

[...]

2.2.3. Monotonía

Monotonía: funciones crecientes y decrecientes. Definición

Otra propiedad interesante de las funciones es aquella conocida en matemáticas como *monotonía*. Como la propia palabra indica, diremos que una función es monótona cuando responde siempre creciendo o decreciendo a cambios en la variable independiente x. Por ejemplo

- El dinero que pago en la frutería es mayor cuantos más kg de manzanas me llevo.
- El tiempo que tardo en limpiar la casa es menor cuanta más gente me ayuda.
- La velocidad a la que cae un objeto es mayor cuanto más tiempo lleva cayendo.

Las tres frases anteriores están representando funciones monótonas, siendo la segunda decreciente y las otras dos crecientes. La idea por tanto es que en una función creciente a medida que x es más grande (me voy a la derecha en la gráfica) $y = f(x)$ se vuelve también más grande. Si pasa lo contrario diremos que la función es decreciente.

A continuación mostramos la definición rigurosa de este término.[1]

• Definición: Función creciente

Diremos que una función $f(x)$ es *monótona creciente* o simplemente *creciente* en un cierto intervalo (a, b) si para cualquier par de valores $c, d \in (a, b)$ con $d > c$ se cumple que

$$f(d) > f(c) \tag{2.13}$$

[1]Existe un debate (prácticamente semántico) sobre si tenemos que pedir que $f(d) > f(c)$ o $f(d) \geq f(c)$. Cuando uno se pone a hilar tan fino entonces se ve en la necesidad de definir conceptos como “función estrictamente creciente” o“función no decreciente” pero es un mundo lleno de convenios que, en mi opinión, no aporta nada interesante. En estos apuntes vamos a optar por llamar función constante a aquella que cumple $f(d) = f(c)$ y no nos preocuparemos de más nomenclatura tediosa.

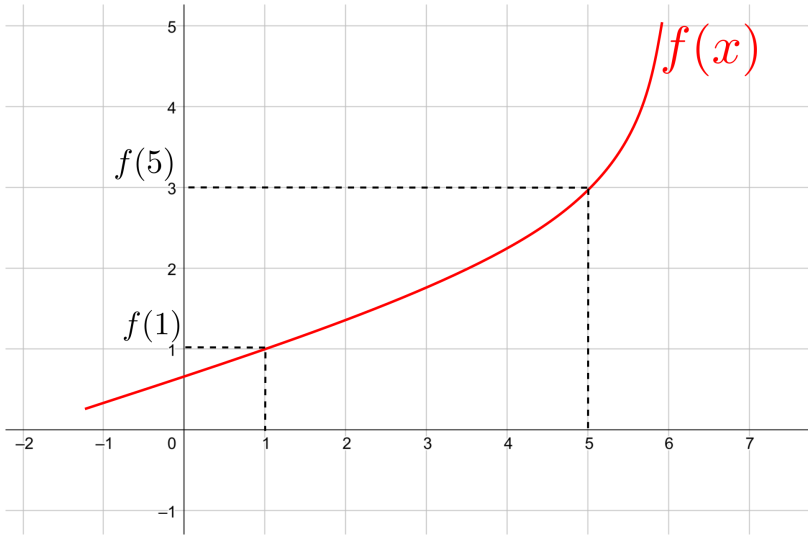


Figura 2.5: *Como podemos ver, la función de la figura es claramente creciente. Para cualquier par de valores que tomemos en* x *se cumple que la imagen del mayor es más grande que la imagen del menor. Por ejemplo,* $5 > 1$ *y claramente* $f(5) = 3 > 1 = f(1)$.

• Definición: Función decreciente

Diremos que una función $f(x)$ es decreciente en un cierto intervalo (a, b) si para cualquier par de valores $c, d \in (a, b)$ con $d > c$ se cumple que

$$f(d) < f(c) \tag{2.14}$$

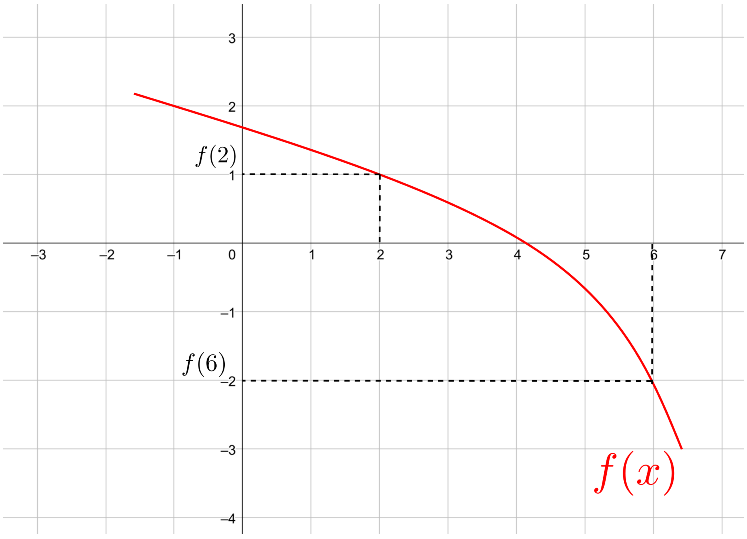


Figura 2.6: *Como podemos ver, la función de la figura es claramente decreciente. Para cualquier par de valores que tomemos en* x *se cumple que la imagen del mayor es más pequeña que la imagen del menor. Por ejemplo,* $6 > 2$ *y claramente* $f(6) = -2 < 1 = f(2)$.

Evidentemente, no todas las funciones son monótonas en cualquier intervalo que se nos ocurra, pero típicamente sí lo serán 'a trozos', es decir, en sub-intervalos dentro de su dominio. Una parte importante del análisis de funciones es identificar estos intervalos de crecimiento y decrecimiento. Echa un vistazo a la figura 2.7 para ver un ejemplo de lo que nos referimos.

Criterios de monotonía

La definición que hemos dado de monotonía parece bastante intuitiva, y sin duda será muy fácil decidir si una función es creciente o decreciente en un cierto intervalo si nos dan la gráfica pero ¿qué ocurre si no conocemos la gráfica? ¿tenemos alguna herramienta que nos ayude a estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función a partir de su expresión analítica? Evidentemente, la respuesta es que sí, y está relacionado con la derivada de la función.

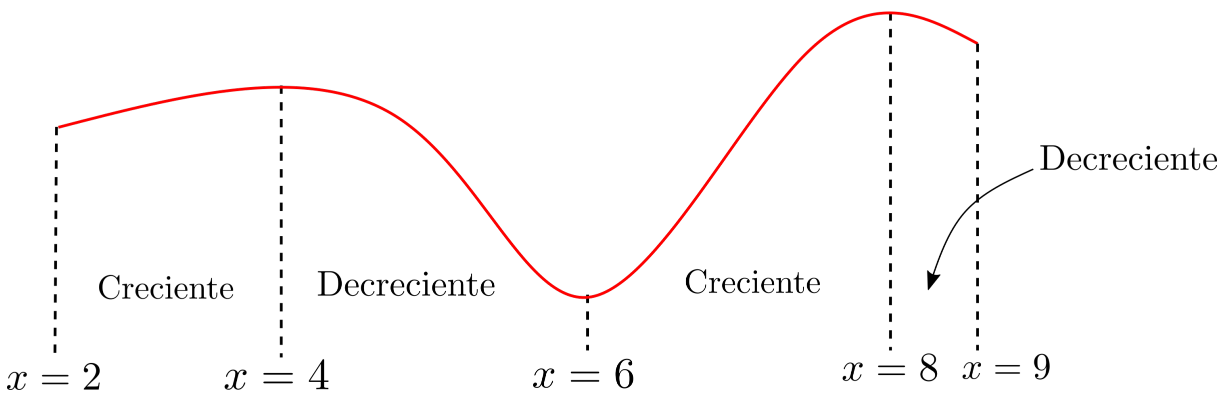


Figura 2.7: *En esta figura se muestra una función definida en* $[2, 9]$. *Como es evidente, la función no es monótona en este intervalo, pero sí lo es en cada uno de los intervalos marcados entre líneas punteadas. Podemos decir por tanto que la función será creciente en* $(2, 4) \cup (6, 8)$ *y decreciente en* $(4, 6) \cup (8, 9)$

Si recordamos la unidad anterior, vimos que la derivada no era más que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función. Cuando la derivada es positiva esto señala que la tangente crece, mientras que cuando la derivada es negativa la recta tangente será decreciente. Parece bastante intuitivo por tanto que el concepto de derivada está muy ligado al de monotonía, puesto que una función creciente siempre va a tener derivada positiva y viceversa (mira la figura 2.8 hasta que te convenzas de esto). Este resultado merece ser remarcado [2], junto con el análogo para funciones decrecientes.

• Teorema 2.3: Criterio de monotonía para una función derivable

Sea $f(x)$ una función monótona en el intervalo (a, b), entonces

- Será creciente si y solo si $f'(x) > 0$ para cualquier x en (a, b)
- Será decreciente si y solo si $f'(x) < 0$ para cualquier x en (a, b)

[2] El argumento que he hecho aquí es completamente heurístico, pero creo que es suficientemente intuitivo si uno mira unas cuantas gráficas de funciones crecientes. Por supuesto, existe una demostración rigurosa de esto, pero está fuera los objetivos de este curso.

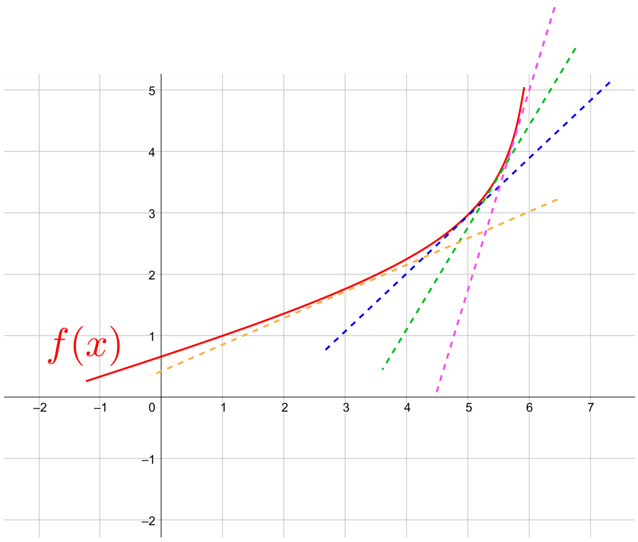


Figura 2.8: *Como vemos en la figura, todas las tangentes a una función creciente que nos podamos imaginar tienen pendiente positiva.*

- Será constante si y solo si $f'(x) = 0$ para cualquier x en (a, b)

Como dijimos en el apartado anterior, las funciones en general suelen cambiar su comportamiento: serán crecientes en algunas regiones y decrecientes en otras, de modo que nuestro trabajo es encontrar cuáles son esas regiones para cada caso. Por suerte, el resultado anterior nos da muchas pistas sobre cómo encontrar estos intervalos de cada tipo. En efecto, si somos capaces de calcular $f'(x)$ entonces el estudio de la monotonía de $f(x)$ se limita a hacer un estudio de los signos de $f'(x)$, o lo que es lo mismo, a resolver las inecuaciones

$$f'(x) > 0 \tag{2.15}$$

$$f'(x) < 0 \tag{2.16}$$

de tal modo que las soluciones de (2.15) serán los puntos en los que f es creciente, y las soluciones de (2.16) corresponderán a los puntos en los que f es decreciente. Para resolver este tipo de inecuaciones será importante que tengamos en cuenta dos posibles motivos por los que una función (en nuestro caso $f'(x)$) puede cambiar de signo, a saber

- Si $f'(x)$ está bien definida en el intervalo en el que la estudiamos y es continua allí, entonces necesariamente existe un punto en el que la función pasa de ser positiva a negativa, y en ese punto tendrá que valer cero: $f'(x) = 0$. Dicho de una forma intuitiva, si quiero pintar sin levantar el lápiz del papel una función que pasa del primer cuadrante al cuarto (por ejemplo) entonces necesariamente tengo que cruzar[3] en algún momento el eje de las x.

- Si por el contrario $f'(x)$ no está definida en algún punto, o tiene una discontinuidad entonces será posible que el signo de $f(x)$ cambie en este tipo de puntos. Volviendo a la metáfora anterior, si me permito levantar el lápiz del papel entonces puedo pasar de un cuadrante a otro sin cruzar el eje en ningún momento.

Como en cualquier otra inecuación, este tipo de puntos singulares, llamados *puntos críticos* de f. serán candidatos a ser lugares en los que $f'(x)$ cambia de signo, y por tanto $f(x)$ cambia su monotonía. Es importante hacer énfasis en la palabra *candidatos* puesto que lo que acabamos de argumentar es una condición necesaria, pero no suficiente. Podría ocurrir que una cierta función $f'(x)$ se anule en un punto sin cambiar de signo después, o que ésta sea discontinua pero salte entre dos valores positivos diferentes. En la sección **??** volveremos a este concepto.

Una forma organizada de todo lo que acabamos de discutir nos sugiere un algoritmo para encontrar las regiones de crecimiento y decrecimiento:

• Teorema 2.4: Algoritmo para el estudio de la monotonía de una función:

Dada una cierta función $f(x)$ continua y derivable salvo quizás en un conjunto finito de puntos

1. Calcularemos la derivada $f'(x)$

2. Estudiaremos en qué puntos la derivada $f'(x)$ no existe o es discontinua, los cuales pueden proceder de dos motivos

[3] Existe un teorema que garantiza esto denominado Teorema de Bolzano.

- $f'(x)$ no existe en un cierto $x = a$ porque ni siquiera $f(x)$ estaba definida en este punto o era discontinua allí (recordemos que la continuidad es una condición necesaria para que exista la derivada).
- $f'(x)$ es discontinua en un cierto $x = a$ (por ejemplo porque $f(x)$ tiene un 'pico' en ese punto)

una vez localizados estos puntos, los añadiremos a una lista de *puntos críticos*.

3. Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$. Todas las soluciones de esta ecuación serán también puntos críticos y los añadiremos a nuestra lista.

4. Una vez tenemos nuestra lista completa de puntos críticos éstos nos definirán una serie de intervalos en los que estudiar nuestra función. Simplemente dando valores ahora en cada intervalo de interés hallaremos el signo de $f'(x)$ en cada uno de ellos y podremos establecer la monotonía de $f(x)$ recordando que

   - Aquellas regiones en las que $f'(x) > 0$ corresponderán con regiones en las que $f(x)$ es creciente.
   - Aquellas regiones en las que $f'(x) < 0$ corresponderán con regiones en las que $f(x)$ es decreciente.

Será mejor que veamos algunos ejemplos:

• Ejemplo: Estudio de la monotonía de $f(x) = 5x^2 + 20x$

Para estudiar la monotonía de $f(x)$ lo primero que debemos hacer es calcular la derivada, esto es

$$f'(x) = 10x + 20\,. \tag{2.17}$$

Ahora tenemos que estudiar en qué regiones esta función es positiva y en cuáles es negativa. Aunque resulta bastante evidente, sigamos el procedimiento sistemático buscando el punto de corte. En efecto:

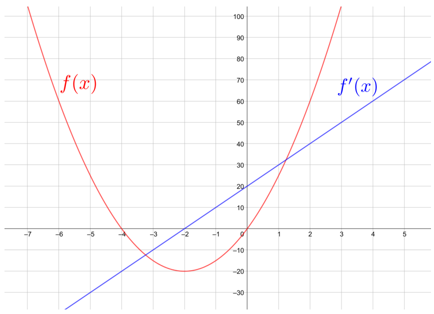
$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 10x + 20 = 0 \Longleftrightarrow x = -2 \tag{2.18}$$

de modo que $x = -2$ es el punto en el que la función podría cambiar de signo. Esto nos define dos regiones: el intervalo $(-\infty, -2)$ y el $(-2, \infty)$ y sólo tenemos que dar algunos valores para ver qué signo tiene $f'(x)$ en cada uno de ellos. Si se desea se puede hacer una tabla y es fácil ver que

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$f'(x) = 10x$	$-$	$+$

lo cual inmediatamente nos da información sobre la monotonía de $f(x)$. De nuevo, se puede expresar en una tabla (o de cualquier otra forma)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, \infty)$
$f(x) = 10x$	Decreciente	Creciente



Un ejemplo algo más interesante es el siguiente:

- **Ejemplo: Estudio de la monotonía de $g(x) = x^3 + 9x^2 + 24x + 3$**

Para estudiar la monotonía de $g(x)$ lo primero que debemos hacer es calcular la derivada, esto es

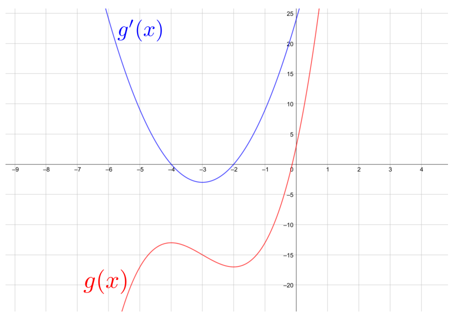
$$g'(x) = 3x^2 + 18x + 24\,. \tag{2.19}$$

Ahora tenemos que estudiar en qué regiones esta función es positiva y en cuáles es negativa. Para buscar los puntos de corte imponemos

$$g'(x) = 0 \Longleftrightarrow 3x^2 + 18x + 24 = 0 \tag{2.20}$$

y resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos las soluciones $x_1 = -4$ y $x_2 = -2$. Si la función cambia de signo, necesariamente lo hace en estos dos puntos, lo cual nos define tres regiones: el intervalo $(-\infty, -4)$, el $(-4, -2)$ y por último el $(-2, \infty)$. Lo único que nos falta ahora es dar algunos valores para ver qué signo tiene $g'(x)$ en cada uno de ellos, y esto nos da información sobre la monotonía de $g(x)$. Podemos presentar todos los datos en una sola tabla

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -2)$	$(-2, \infty)$
$g'(x) = 3x^2 + 18x + 24$	$+$	$-$	$+$
$g(x)$	Creciente	Decreciente	Creciente



2.2.4. Extremos y acotación

Extremos: máximos y mínimos de una función. Definición

Como hemos visto en la sección anterior, es intuitivo definir el concepto de funciones crecientes o decrecientes en ciertos intervalos, de modo que será natural ponerle un nombre a aquellos puntos en los que una función pasa de ser creciente a decreciente. Cuando esto pasa (paramos de subir para empezar a bajar) parece evidente que habremos alcanzado una ‘cima’: un punto que es más alto que aquellos inmediatamente anteriores y posteriores a alcanzar la cima. Llegamos con esto a una primera definición intuitiva del concepto de 'máximo', es decir, aquel punto en el que la función alcanza un valor que es más alto que los valores que toma en los puntos de su entorno. La definición formal es la siguiente:

• Definición: Extremo local o relativo

Diremos que una función $f(x)$ tiene un

- *Máximo local* o *relativo* en $x = a$ de valor $f(a)$ si $f(a) > f(x)$ para todos los x en un entorno de a.
- *Mínimo local* o *relativo* en $x = a$ de valor $f(a)$ si $f(a) < f(x)$ para todos los x en un entorno de a.

donde, como vemos, hemos definido también el concepto opuesto para aquellos puntos en los que la función alcanza los valores más pequeños de un cierto entorno. Los máximos y mínimos de una función son denominados extremos.

Como sabemos, las funciones pueden tener muchas regiones diversas de crecimiento y decrecimiento, de modo que una misma función puede alcanzar varios máximos y mínimos locales, del mismo modo que una cordillera presenta multitud de cimas y valles. Si estamos interesados en la más alta de todas las cimas o en el más profundo de los valles entonces hablaremos de extremos *globales* o *absolutos*.

• Definición: Extremo global o absoluto

Diremos que una función $f(x)$ tiene un

- *Máximo global* o *absoluto* en $x = a$ de valor $f(a)$ si $f(a) > f(x)$ para cualquier x del dominio de f.

- *Mínimo global* o *absoluto* en $x = a$ de valor $f(a)$ si $f(a) < f(x)$ para cualquier x del dominio de f.

Se sigue de estas definiciones que un extremo global será siempre local, mientras que lo contrario no será cierto en general. Una vez que hayamos caracterizado los extremos locales de una función bastará con ver cuál de ellos tiene el valor más grande (o más pequeño para los mínimos) para declararlo como el extremo global de la función.

Criterios de caracterización de extremos locales

Una vez que hemos definido el concepto de extremo local nos encontramos con la pregunta de siempre:

> *"Ok, ya sé cómo identificar los extremos a partir de la gráfica pero ¿Cómo los encuentro si sólo tengo la expresión de $f(x)$?"*

que efectivamente es la pregunta relevante, puesto que nuestro objetivo final siempre será pintar la gráfica de una función a partir de su expresión analítica. Veamos cómo podemos deducir los criterios que nos ayudarán a encontrar esos extremos locales.

Como hemos dicho antes, un máximo[4] es una 'cima': un punto donde la función es mayor que en los puntos de su alrededor y podemos considerar tres posibilidades de que pase esto:

- La primera posibilidad es que alrededor de esa cima la función caiga abruptamente a otro valor. Esto ocurrirá si la función no es continua ahí, tal y como podemos ver en el ejemplo de la Figura 2.9, que muestra un máximo en $x = -1$.
- La segunda posibilidad es que la función sea continua pero el punto de estudio marque un cambio en la monotonía de la función. Es decir, si la función pasa de ser creciente a

[4] Centramos aquí la discusión en los máximos por simplicidad, pero el argumento es análogo para los mínimos.

decreciente en $x = a$ entonces nos encontraremos ante un máximo puesto que allí la función 'para de subir' y 'empieza a bajar'. Dentro de este caso existen don posibilidades.

- Si la función no es derivable en $x = a$ entonces el máximo acabará en un 'pico'. La derivada lateral por la izquierda será positiva y la derivada por la derecha negativa. En la Figura 2.9 se muestra un extremo local no derivable en $x = 4$.
- Si la función es derivable entonces debe pasar suavemente de creciente a decreciente, o lo que es lo mismo, la derivada cambiará suavemente de positiva a negativa. Eso quiere decir que la derivada es continua y por lo tanto en el máximo tendrá que valer cero. Esto concuerda con la intuición de que si la función alcanza un máximo 'suave' (sin picos) entonces la tangente en ese punto será completamente horizontal. En la Figura 2.9 se muestran varios máximos locales derivables, como por ejemplo el situado en $x = 2$.

Después de esta discusión es conveniente que pongamos nombre a este tipo de puntos y enunciemos oficialmente el resultado

• Definición: Punto crítico de una función

Diremos que el punto $x = a$ es un punto crítico de la función $f(x)$ si se cumple alguna de estas posibilidades

- La función es discontinua en $x = a$.
- La función es continua pero no derivable en $x = a$.
- La función es continua y derivable en $x = a$ pero $f'(a) = 0$

• Teorema 2.5: Caracterización de extremos locales

Si una función $f(x)$ tiene un extremo local en el punto $x = a$ entonces este será un punto crítico.

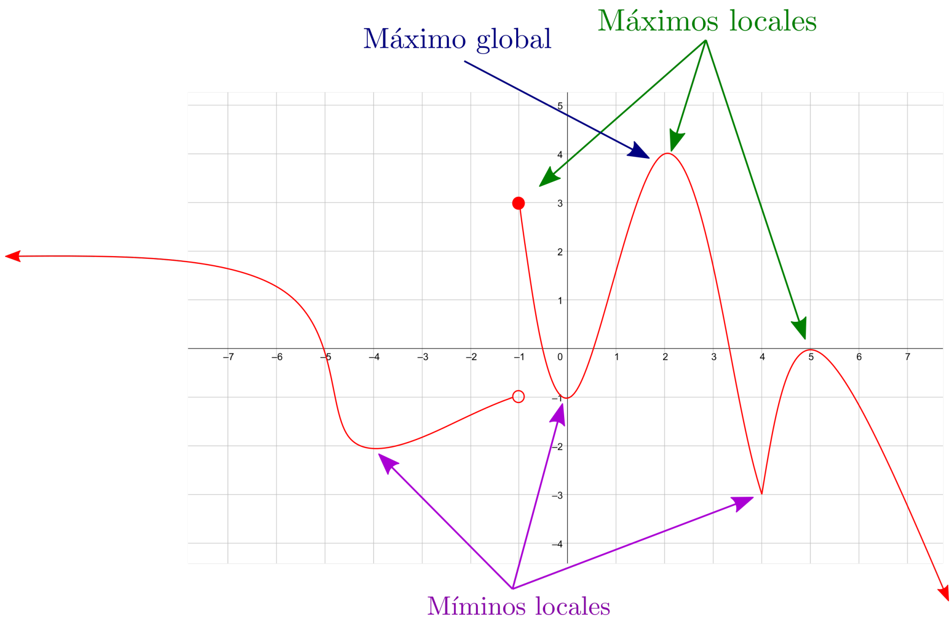


Figura 2.9: *En esta figura se muestra una función con una serie de extremos. Por ejemplo, la función presenta un mímimo local en $x = 4$ de valor $f(4) = -3$. El extremo situado en $x = 2$ es un máximo, que además de ser local es global, puesto que es el mayor de todos los locales. Por último, no existe un mínimo global, dado que la función es no acotada por abajo.*

es importante entender que este resultado va en una sola dirección. Es decir, todos los extremos se encontrarán en puntos críticos pero no todos los puntos críticos tienen por qué tener extremos. En la Figura 2.10 se muestra un ejemplo de cada tipo de punto crítico que **no** es un extremo de la función

Acotación: ¿extremos infinitos?

A la hora de buscar los extremos de una función es posible que nos encontremos con la sorpresa de que esta tiende a $\pm\infty$ en algún punto, de modo que técnicamente allí no existe cima o valle de ningún tipo y parece que no podemos encontrar esos extremos. Uno podría sentir la tentación de decir algo como lo siguiente

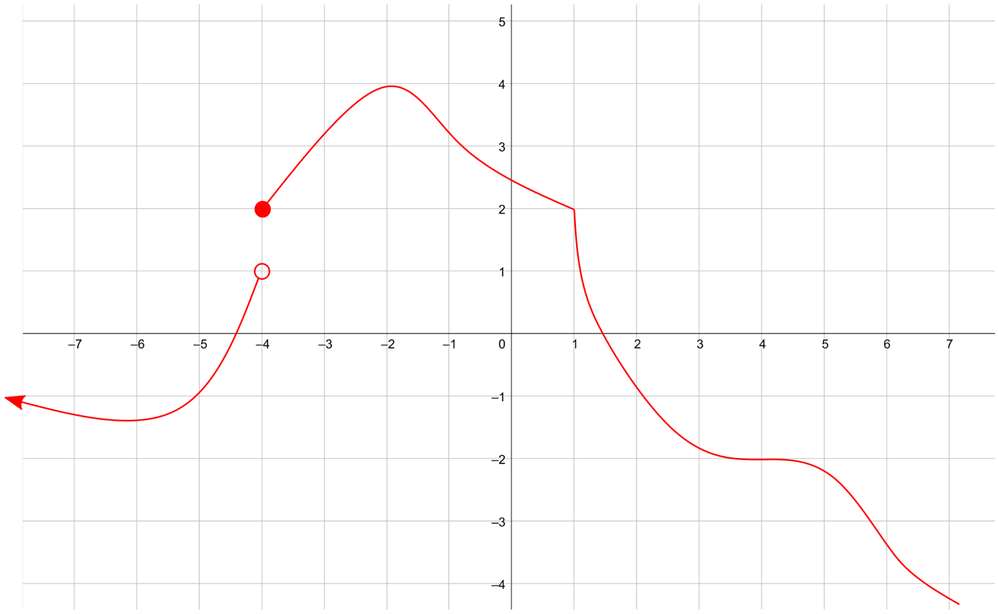


Figura 2.10: *En esta figura se muestra una función con una serie de puntos críticos en* $x = -4, -2, 1, 4$. *De todos ellos, sin embargo, sólo* $x = -2$ *es un extremo (un máximo en concreto). Esto nos muestra que podemos buscar* ***candidatos*** *a extremos entre los puntos críticos, pero no todos van a serlo.*

> *La función* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *tiene un máximo en* $x = 0$ *de valor* $f(0) = \infty$

pero estaríamos cometiendo una incorrección, puesto aque $f(x)$ no está definida en $x = 0$ (sólo su límite lo está) y esto no está de acuerdo con nuestra definición de máximo. En su lugar, cuando una función se va a ∞ en algún punto diremos que la función *no está acotada por arriba*, dando a entender que no existe ningún 'techo', por alto que este sea, capaz de encerrar a nuestra función. La definición formal es la siguiente

• Definición: Función acotada

Diremos que una función $f(x)$ está

- *Acotada por arriba* si existe algún número $s \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < s$ para cualquier x. En ese caso diremos que s es una *cota superior* de $f(x)$.
- *Acotada por abajo* existe algún número $i \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) > i$ para cualquier x. En ese caso diremos que i es una *cota inferior* de $f(x)$.

Cuando una función está acotada por arriba, por tanto la altura del máximo global[5] es una posible cota superior de $f(x)$, mientras que si está acotada por abajo será el mínimo global quien pone un 'suelo' que $f(x)$ no traspasará. Cuando nos encontramos que en algún punto x_0 tenemos

$$\lim_{x \to p} f(x) = \pm\infty \tag{2.21}$$

esto será un signo de que la función no está acotada (por arriba en el caso de '∞ y por abajo para $-\infty$) y por tanto no tendrá el correspondiente extremo global.

2.2.5. Curvatura

Observa la Figura 2.11 e imagina que es un circuito de Fórmula 1 visto desde arriba. Desde nuestro punto de vista, la noción de crecimiento y decrecimiento está relacionada con si el coche se dirige hacia el Norte o el Sur en cada momento, pero esto no es especialmente importante para el conductor del coche. Para el piloto lo importante es saber cuándo tiene que girar hacia izquierda o derecha, y eso no tiene que ver con si se dirige al Norte o al Sur, sino con el *cambio* de esa dirección. Si nos fijamos en el tramo entre $x = 5$ y $x = 7$, por ejemplo, es fácil darnos cuenta de que el volante del conductor deberá estar girado hacia la izquierda en todo momento, independientemente de que la función sea decreciente o creciente en este tramo.

Esta noción de que el conductor debe girar el volante para seguir en la pista es lo que en matemáticas llamamos curvatura, y es posible cuantificarla: cuando el piloto debe girar mucho el volante diremos que la curvatura es muy grande mientras que si lo gira poco tendremos una curvatura pequeña, siendo esta cero en el caso de una recta. En este curso, no obstante, no

[5] Tecnicamente esto no es estrictamente cierto...pero vamos a suponer por simplicidad que sí.

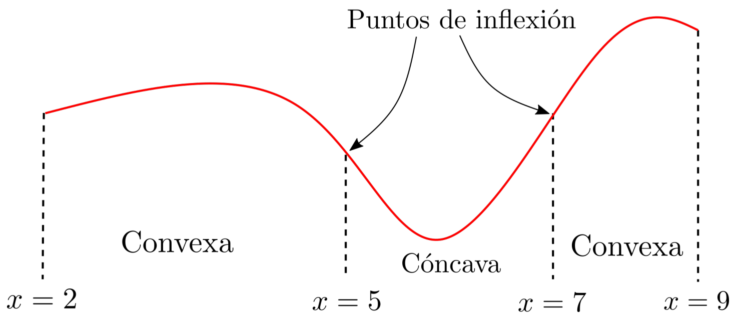


Figura 2.11: *En esta figura se muestra ...*

vamos a estudiar en detalle esta forma de cuantificar la curvatura, sino que nos limitaremos a caracterizar aquellos tramos en los que el conductor debe girar hacia la izquierda (que llamaremos *cóncavos*) y aquellos en los que debe girar a la derecha (denominados *convexos*). Entre medias de una situación y otra es evidente que en algún momento el piloto tendrá que pasar por poner el volante en el punto medio y en ese caso diremos que el circuito (la función) tiene un *punto de inflexión*. Veamos una definición más precisa de este concepto:

• Definición: Curvatura. Funciones cóncavas y convexas

Diremos que una función $f(x)$ en un cierto intervalo (a, b) es

- *Cóncava* si para cualquier par de puntos de su gráfica, la cuerda que pasa por ellos deja a $f(x)$ por debajo. Equivalentemente, si una función es cóncava entonces todas sus tangentes dejan a $f(x)$ por encima.
- *Convexa* si para cualquier par de puntos de su gráfica, la cuerda que pasa por ellos deja a $f(x)$ por encima. Equivalentemente, si una función es convexa entonces todas sus tangentes dejan a $f(x)$ por debajo.

Además, si una función pasa de cóncava a convexa en un cierto punto $x = c$ entonces diremos que dicho punto es un *punto de inflexión* de $f(x)$.

Posiblemente la definición sea un poco abstracta así que lo mejor será que lo veamos con un ejemplo en la Figura 2.12. En la Figura 2.11 también se muestran varias regiones de diferente curvatura y sus puntos de inflexión.

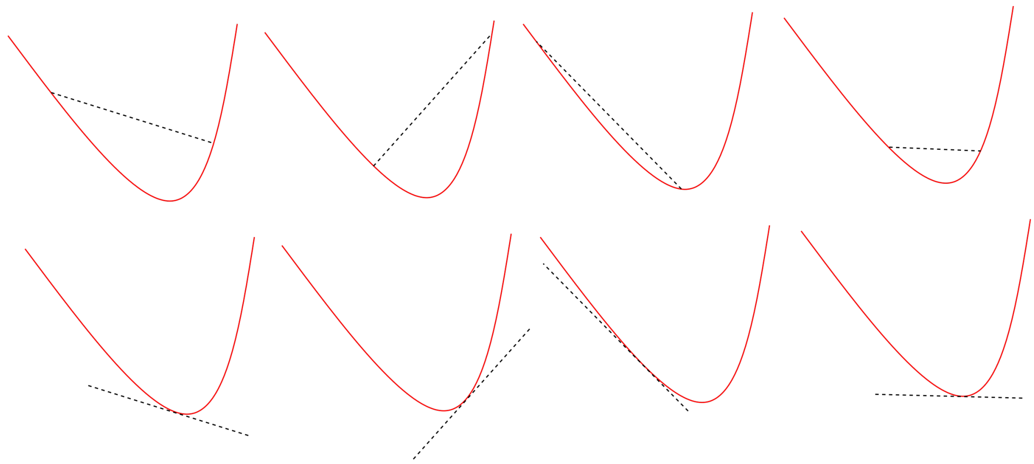


Figura 2.12: *En esta figura se muestra una función cóncava. Como vemos, cualquier cuerda que nos podamos imaginar deja a la función por debajo, sin que esta se 'cruce' con la cuerda en ningún momento. Así mismo, si construimos todas las tangentes, estas dejan a la gráfica por encima. Para ver el caso de una función convexa basta con que gires la página 180º.*

Criterio de caracterización de la curvatura.

[...] derivada segunda, blablabla

2.2.6. Ramas infinitas. Asíntotas

[...] Explicación blablabla

• Definición: Rama infinita

Diremos que una función $f(x)$ tiene una rama infinita si existen puntos de su gráfica que se encuentren a distancia infinita del origen de coordenadas, o de forma más precisa, habrá una rama infinita en en $x = p$ si la distancia de los puntos de la gráfica $(x, f(x))$ al origen tiende a ∞ a medida que $x \to p$.

• Definición: Asíntota

Diremos que una cierta recta r del plano es una *asíntota* de la función $f(x)$ si a medida que $f(x)$ tiende hacia algún[a] punto p se cumplen las siguientes condiciones (a la vez)

- La función presenta una rama infinita en $x = p$
- La función además se acerca a la recta r. Es decir, la distancia entre la gráfica de $f(x)$ y r tiende a cero a medida que x tiende a p.

[a] Este punto también puede ser $\pm\infty$

Criterios de caracterización de asíntotas

Como hemos visto, una función tiene una asíntota si se acerca a una cierta recta (sin llegar a tocarla) en algún límite, pero ¿cómo podemos caracterizar esto si no disponemos de una gráfica en la que se observe? Veámoslo: imaginemos que tenemos una asíntota oblicua como la que se muestra en la figura AAAA. La recta en cuestión en nuestro caso es $r(x) = x+$ y cuando decimos que $f(x)$ se está acercando a $r(x)$ lo que decimos de algún modo es que $f(x) \simeq r(x)$ en el límite apropiado (en este caso cuando $x \to \infty$. Podríamos ser algo más precisos y cuantificar esto al menos de un par de formas diferentes

- Dado que $f(x)$ se acerca cada vez más a $r(x)$ parece lógico que su cociente será cada vez más cercano a 1. Efectivamente, si $r(x)$ es una asíntota de $f(x)$ tendremos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{r(x)} = 1 \tag{2.22}$$

• Teorema 2.6: Caracterización de asíntotas

Sea $f(x)$ una función, entonces la función

- Tendrá una asíntota horizontal si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$ con $a \in \mathbb{R}$.
- Tendrá una asíntota vertical en $x = b$ si $\lim_{x\to b^{\pm}} f(x) = \pm\infty$
- Tendrá una asíntota oblicua si

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \tag{2.23}$$

con $m \in \mathbb{R}$. En este caso, m será la pendiente de la asíntota y la ordenada en el origen será

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) \tag{2.24}$$

• Ejemplo: Cálculo de asíntotas de $f(x) = 3x + \dfrac{2}{x-2} - 2$

Para encontrar las asíntotas de $f(x)$, exploraremos por orden los tres casos posibles

- **Asíntotas horizontales:** calculando los límites en el infinito

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \tag{2.25}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \tag{2.26}$$

de modo que concluimos que no existen asíntotas horizontales a ninguno de los dos lados.

- **Asíntotas verticales:** para encontrar las asíntotas verticales debemos buscar aquellos puntos que son susceptibles de dar lugar a límites infinitos. En particular, es fácil ver que la funcón no está definida en $x = 2$ y que ésta diverge a medida que nos acercamos a este punto. En concreto:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \tag{2.27}$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty \tag{2.28}$$

Tendremos por tanto una asíntota vertical en $x = 3$, aunque la función se acercará a esta por distintos lados por la izquierda o por la derecha.

- **Asíntotas oblicuas:** para encontrar asíntotas oblicuas calculamos el los límites (2.23) y observamos si es finito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x + \frac{2}{x-2} - 2}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x} = 3 \tag{2.29}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x + \frac{2}{x-2} - 2}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{x} = 3 \tag{2.30}$$

de modo que efectivamente encontramos que hay una asíntota de pendiente $m = 3$ tanto a izquierda como a derecha. Para calcular la ordenada en el origen de la recta usamos (2.24) y tendremos

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{2}{x-2} - 2 \right) = -2 \tag{2.31}$$

que como vemos es la misma para $\pm\infty$ y por tanto nos indica que es la misma recta a ambos lados. Recapitulando, tendremos una asíntota oblicua en $r(x) = 3x - 2$.

2.2.7. Cortes con los ejes

Cuando estudiamos una función, es habitual el cálculo de los cortes con los ejes coordenados. Desde un punto de vista puramente matemático estos puntos no son especiales ni más interesantes que otros, puesto que simplemente dependen de el lugar en el que hemos decidido colocar esos ejes (donde empezamos a contar en x y en y). En un contexto más práctico, sin embargo, encontrar los cortes con los ejes puede ser relevante para resolver ciertos tipos de problemas.

• Definición

Los cortes con los ejes coordenados de la función $f(x)$ corresponderán a los siguientes puntos

- $(0, f(0))$ para el corte con el eje y
- Todos los puntos de la forma $(x_i, 0)$ donde $x_i = x_1, x_2, ..., x_n$ serán las n soluciones reales de la ecuación $f(x) = 0$.

2.3. Funciones elementales

El mundo de las funciones es tan complejo como nos podamos imaginar y en ocasiones las funciones que aparecen en contextos reales (física, matemática aplicada, etc.) pueden llegar a ser muy complicadas de estudiar incluso con la ayuda de ordenadores. Existe no obstante un conjunto de funciones elementales que aparecen con mucha frecuencia y cuyas características fundamentales es útil conocer. A continuación repasamos algunas de ellas, utilizando las herramientas que hemos aprendido para estudiar su comportamiento y dibujar su gráfica.

2.3.1. Polinomios

Las funciones más simples que podemos imaginar son los polinomios. Su presencia en campos como la física, la ingeniería, la economía o la biología es enorme, ya que todo par de cantidades cuantificables y que tengan algún tipo de correlación tendrán siempre, como mínimo, una relación aproximadamente lineal en algún rango de valores.

Además de útiles, los polinomios son sencillos de estudiar, puesto que se trata de funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, lo que facilita mucho su análisis. En general, un polinomio siempre tendrá todos los reales como dominio, mientras que su imagen dependerá de algunos

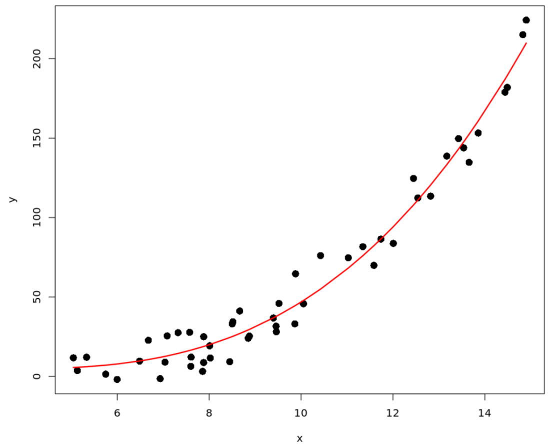


Figura 2.13: *Por su simplicidad, los polinomios suelen utilizarse para ajustar una función a una serie de datos discretos, utilizando una técnica llamada 'interpolación polinómica' o 'regresión polinomial'. En esta gráfica tenemos una serie de medidas y podemos estar interesados en extrapolar algún tipo de ley o comportamiento. Por ejemplo, la gráfica podría representar el precio de un producto a lo largo del tiempo y podemos estar interesados, para hacer un plan de negocio a largo plazo, en estimar el precio futuro de este producto. Encontrando un polinomio que aproxima bien a la serie de puntos podemos extrapolar el comportamiento y tratar de predecir el precio futuro.*

detalles. Al tratarse de funciones continuas será muy relevante cómo se comportan en $\pm\infty$, comportamiento que estará dominado por el término de mayor grado del polinomio. En particular

- Si el término de mayor grado tiene grado impar entonces la función barrerá todos los positivos y negativos y resultará que no está acotada por arriba ni por abajo y por tanto $\mathrm{Im} f = \mathbb{R}$.

- Si el término de mayor grado tiene grado par entonces la función tendrá ramas infinitas a izquierda y derecha pero ambas en la misma dirección de y, lo que implica que estará acotada sólo por uno de los dos lados y habrá un extremo que marque el punto mínimo o máximo alcanzado en y. La imagen en este caso será infinita por un lado, pero acabará en el valor de este extremo por el otro.

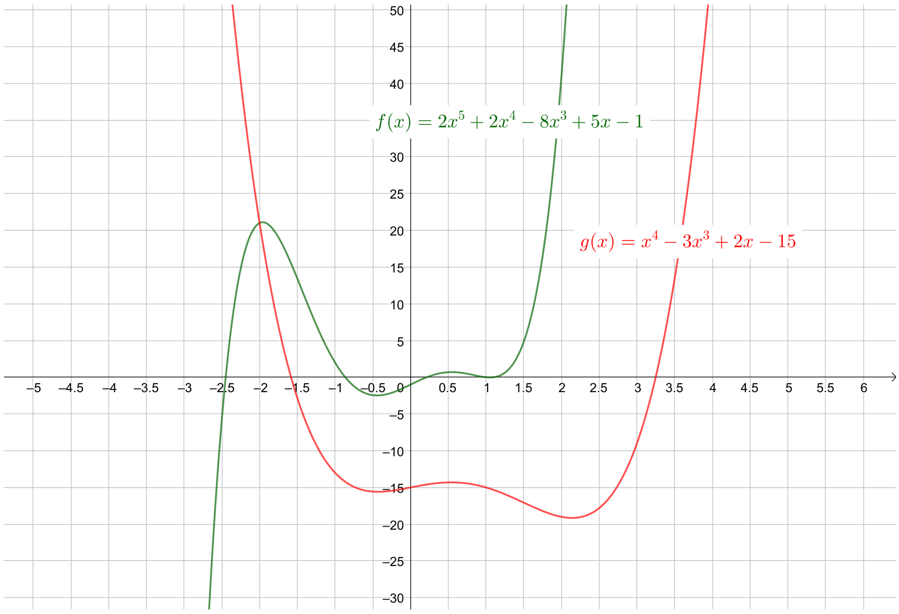


Figura 2.14: *En estos dos polinomios podemos ver un ejemplo de lo comentado. En el polinomio $f(x)$ el comportamiento en los infinitos está dominado por el término $2x^5$, de modo que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 2x^5 = \pm\infty$ y por tanto la imagen de $f(x)$ es $\mathbb{R}$. En el caso del polinomio $g(x)$ sin embargo, quien domina en el infinito es x^4 y tendremos $\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^4 = \infty$ a ambos lados, con lo que sólo barrerá valores de y hasta la altura de su mínimo absoluto, que en este caso es -19. Así pues, la imagen de este polinomio será* $\mathrm{Im}(g) = [-19, \infty)$.

A la hora de estudiar la monotonía y extremos relativos, la casuística será simple: dado que los polinomios son funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$, los únicos puntos críticos que podrán existir serán aquellos en los que se anula la derivada y no tendremos que preocuparnos de discontinuidades o puntos no derivables. Relacionado con esto, resulta particularmente útil que recordemos uno de los teoremas más importantes de las matemáticas[6]

• Teorema 3.1: Teorema fundamental del álgebra

[6] Realmente el teorema fundamental del álgebra es mas completo y nos habla de las soluciones complejas de un polinomio. Se podría decir que esto que presentamos aquí es un corolario del teorema, pero es lo que nos interesa ahora mismo para nuestros propósitos.

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, entonces dicho polinomio tiene como máximo n raíces reales diferentes.

del cual podemos obtener rápidamente el siguiente resultado

• Teorema 3.2: puntos críticos de un polinomio

Sea $P(x)$ un polinomio de grado n, entonces dicho polinomio tiene como máximo $n-1$ puntos críticos

• Demostración 3.2: puntos críticos de un polinomio

Como hemos argumentado, por ser los polinomios continuos y derivables, sólo tendrán puntos críticos en aquellos puntos que anulan su derivada. Si $P(x)$ tiene grado n, su derivada $P'(x)$ tendrá grado $n-1$ y por el • Teorema 3.1 tendrá como máximo $n-1$ raíces. □

Esta información es muy útil ya que nos da pistas de la cantidad de puntos de corte y de extremos locales que puede tener un polinomio antes de calcular nada. Por ejemplo, si tenemos un polinomio de grado 4, sabemos inmediatamente que cortará al eje x como mucho en 4 puntos, mientras que tendrá como máximo 3 extremos locales.

2.3.2. Fracciones algebraicas

Una vez que hemos finalizado el estudio de los polinomios, el siguiente paso natural es el estudio de las fracciones algebraicas, puesto que estas se construyen a partir de cocientes de polinomios.

• Definición: Fracción algebraica

Llamamos *fracciones algebraicas* a todas aquellas funciones de la forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{2.32}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

El procedimiento para estudiar este tipo de funciones es el mismo que para todas, pero podemos resaltar aquí algunas particularidades comunes

- A la hora de estudiar el dominio, será relevante decidir si existen puntos que anulen el denominador. En estos puntos (las soluciones de $Q(x) = 0$) la división no estará bien definida y por tanto no podrán pertenecer al dominio de $f(x)$.
- Por el motivo anterior, es probable (aunque no obligatorio) que el comportamiento de la función sea asíntótico en torno a estos puntos. Será conveniente que busquemos por tanto asíntotas verticales allí.
- Si la función diverge en este tipo de puntos la derivada normalmente lo hará también de modo que serán puntos críticos de $f(x)$. Tendremos que incluir estos puntos en nuestro estudio de monotonía, puesto que pueden ser puntos en los que la derivada sea discontinua y por tanto cambie de signo.

La mejor manera de familiarizarse con este tipo de funciones no obstante, es haciendo un ejemplo:

• Ejemplo: $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2 - 3x + 25}{x - 3}}$

Dominio e imagen de la función. Como vemos, el denominador de esta fracción algebraica se anula en $x = 3$, de modo que este será un punto problemático para definir la división y por tanto deberá ser excluido de nuestro dominio. Por lo demás ambos polinomios admiten cualquier otro número real sin problemas de modo que el dominio de nuestra función será:

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} - \{3\} \tag{2.33}$$

Calcular la imagen será un poco más complejo en este caso, de modo que pospondremos este apartado para más tarde.

Continuidad. El cociente de funciones continuas es siempre continuo siempre que esté bien definido, de modo que podemos asegurar que $f(x)$ será continua en su dominio. No obstante, la función no está definida en $x = 3$ así que presentará una singularidad (o discontinuidad) en dicho punto. Si calculamos el límite tendremos

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3x + 25}{x - 3} \underset{\frac{25}{0}}{=} \nexists \tag{2.34}$$

y calculando los límites laterales

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - 3x + 25}{x - 3} = \infty \tag{2.35}$$

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{x^2 - 3x + 25}{x - 3} = -\infty \tag{2.36}$$

de modo que podemos concluir que se trata de un salto infinito.

Simetrías y periodicidad. Es fácil ver que la función no tiene ninguna de las simetrías habituales, y tampoco es periódica.

Monotonía: crecimiento y decrecimiento de la función. Como es habitual, tendremos que calcular la derivada para estudiar en detalle la monotonía de la función

$$f'(x) = \frac{(2x-3)(x-3) - (x^2 - 3x + 25)}{(x-3)^2} \tag{2.37}$$

$$= \frac{2x^2 - 6x - 3x + 9 - x^2 + 3x - 25)}{(x-3)^2} \tag{2.38}$$

$$= \frac{x^2 - 6x - 16}{(x-3)^2} \tag{2.39}$$

Llegados a este punto, estaremos interesados en estudiar cuáles son los puntos que cambian el signo de $f'(x)$. Lo cual puede ocurrir como causa de que numerador o denominador cambien de signo. Será importante por lo tanto encontrar en qué puntos cada uno de ellos cambia de signo y hacer un estudio cuidadoso del signo total de $f'(x)$. Si bien el denominador está ya factorizado en este caso, conviene que hagamos lo propio con el numerador. Para ello buscamos primero las raíces del numerador planteando la ecuación

$$x^2 - 6x - 16 = 0\,, \tag{2.40}$$

que tiene como soluciones $x_1 = -2$ y $x_2 = 8$. Podemos entonces escribir el polinomio en su forma factorizada como $x^2 - 6x - 16 = (x+2)(x-8)$ y por tanto la derivada completa toma la forma

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x-8)}{(x-3)^2}\,. \tag{2.41}$$

Los puntos que nos interesan por tanto son $x = -2, 3, 8$, y éstos definirán 4 intervalos diferentes en la recta en los cuales $f'(x)$ puede tener diferentes signos. Haciendo una tabla y dando valores en todos estos intervalos para cada factor tendremos

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,8)$	$(8,\infty)$
$(x+2)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-8)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x) = \frac{(x+2)(x-8)}{(x-3)^2}$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente

Extremos y acotación. Como sabemos, los extremos locales de la función se encuentra entre los puntos críticos (es decir, aquellos en los que la derivada no existe o es cero) pero tendremos que estudiarlos con cuidado para asegurarnos de qué ocurre exactamente en estos puntos. Uno por uno:

- El punto $x = -2$ es un punto en el que $f'(-2) = 0$ de modo que la función debe ser continua y derivable ahí. Podríamos calcular su derivada segunda para averiguar algo más sobre él, pero la tabla del apartado anterior ya nos da suficiente información. En efecto, la función pasa de ser creciente a decreciente en este puntos así que poemos asegurar que se trata de un máximo local. Para calcular su altura simplemente evaluamos la función original en este punto

$$f(-2) = \frac{(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 25}{-2-3} = \frac{4+6+25}{-5} = -7\,, \tag{2.42}$$

y concluimos que este máximo se encuentra en el punto $(-2, -7)$

- El punto $x = 3$ es un punto en el que la derivada no existe, y de hecho la función tampoco (está fuera del dominio de f). Tal y como calculamos en la sección de continuidad, la función tiende a $\pm\infty$ en torno a este punto, de modo que tendremos una asíntota vertical y no un extremo. El hecho de que sea decreciente tanto a izquierda como a derecha de $x = 3$ nos da además una buena idea del comportamiento de la función en torno a este punto.

- El punto $x = 8$ es de nuevo un punto en el que $f'(8) = 0$ y por tanto la función debe ser continua y derivable ahí. Mirando otra vez la tabla del apartado anterior veremos que la función pasa de ser decreciente a creciente en este puntos así que podemos asegurar que se trata de un mínimo local. Para calcular su altura simplemente evaluamos la función original en $x = 8$

$$f(8) = \frac{8^2 - 3 \cdot 8 + 25}{8-3} = \frac{64 - 24 + 25}{5} = 13\,, \tag{2.43}$$

y concluimos que este mínimo se encuentra en el punto $(8, 13)$.

De (2.35) y (2.36) vemos que la función no está acotada ni por arriba ni por abajo, de modo que no tendrá extremos globales.

Imagen de la función. Ahora que ya sabemos dónde se encuentran los extremos de la función es el momento adecuado de volver a la imagen de f. Con lo que hemos aprendido hasta ahora, convéncete de que la imagen viene dada por

$$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, -7] \cup [13, \infty) \tag{2.44}$$

Curvatura. Los cálculos anteriores ya nos dan una buena pista del comportamiento de la curvatura de $f(x)$ pero podemos, no obstante asegurarnos estudiando en detalle el comportamiento de la derivada segunda. Haciendo el cálculo

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{x^2-6x-16}{(x-3)^2} &= \frac{(2x-6)(x-3)^2-(x^2-6x-16)\cdot 2(x-3)}{(x-3)^4} \qquad (2.45) \\ &= \frac{(2x-6)(x-3)-2(x^2-6x-16)}{(x-3)^3} \\ &= \frac{2x^2-6x-6x+18-2x^2+12x+32}{(x-3)^3} \\ &= \frac{50}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

$$(2.46)$$

y para estudiar la curvatura de f nos valdrá con estudiar los signos de $f''(x)$. En este caso el único punto de interés será el que anula el denominador $x=3$ y por tanto sólo existirán dos regiones diferenciadas. Haciendo una tabla y dando valores tendremos

	$(-\infty,3)$	$(3,\infty)$
$f''(x)=\dfrac{50}{(x-3)^3}$	$-$	$+$
$f(x)$	Convexa	Cóncava

La función $f''(x)$ no se anula en ningún punto, de modo que no habrá ningún punto de inflexión.

Asíntotas y ramas infinitas. Como ya vimos, la función tiene una asíntota vertical en $x=3$ pero debemos estudiar los otros tipos. Para comprobar si hay horizontales calculamos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+25}{x-3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x} = \infty \qquad (2.47)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x+25}{x-3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x} = -\infty \qquad (2.48)$$

lo que nos demuestra que no hay asíntotas horizontales. Comprobamos ahora si hay asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad = \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+25}{x(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2}{x^2} = 1 \tag{2.49}$$

lo que nos indica que existe una asíntota $r(x)$ de pendiente $m = 1$. Calculamos ahora la ordenada en el origen

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - x) = \quad = \quad \lim_{x\to 3} \frac{x^2-3x+25}{(x-3)} - x \tag{2.50}$$

$$= \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x+25-x(x-3)}{(x-3)} \tag{2.51}$$

$$= \quad \lim_{x\to\infty} \frac{25}{(x-3)} = 0 \tag{2.52}$$

y concluimos por tanto que nuestra recta asintótica tiene ecuación $r(x) = x$. Es posible repetir los cálculos para $x \to -\infty$ obteniendo idéntico resultado, de modo que $f(x)$ se aproxima a esta asíntota tanto hacia la izquierda como a la derecha.

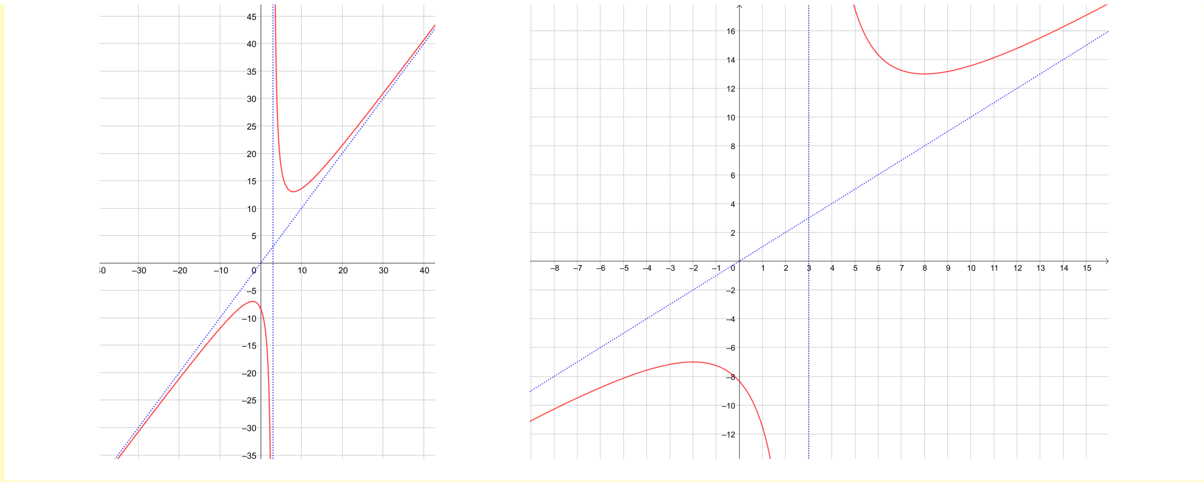
Cortes con los ejes. Para encontrar el corte con el eje y basta con evaluar la función en $x = 0$

$$f(0) = -\frac{25}{3} \simeq -8,33 \tag{2.53}$$

de modo que el corte se encontrará en $(0, -\frac{25}{3})$. En el caso de los cortes con el eje x debemos encontrar aquellos valores que cumplen $f(x) = 0$ pero estos se limitarán a aquellos que hacen el numerador nulo. En concreto, debemos encontrar las soluciones de la ecuación

$$x^2 - 3x + 25 = 0\,. \tag{2.54}$$

Sustituyendo los coeficientes en la fórmula habitual veremos no existe solución y que por lo tanto nuestra función $f(x)$ no corta al eje de las x.



2.3.3. Radicales

2.3.4. Funciones exponenciales y logarítmicas

La función exponencial

La función exponencial es una de las más importantes que existen en matemáticas, de modo que será conveniente que la estudiemos con algo de detalle. Aparece en procesos físicos como la desintegración nuclear o la amortiguación de ondas, pero también en muchos procesos biológicos como la reproducción de especies en ciertas condiciones o el estudio de epidemias.

Se trata de una función muy sencilla de estudiar, así que podremos pasar por todos los pasos habituales rápidamente

$$f(x) = e^x \,. \tag{2.55}$$

En primer lugar nos damos cuenta de que la función está perfectamente definida para cualquier número real, de modo que el dominio será todo $\mathbb{R}$. A la hora de calcular la imagen, sin embargo, nos debemos dar cuenta de que no cualquier número puede provenir del resultado de una exponencial. En particular, nunca es posible obtener un número negativo a partir de una potencia de base positiva[7] de modo que la imagen de e^x se limitará a los reales positivos. Resumiendo:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}\,, \tag{2.56}$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R}^+\,. \tag{2.57}$$

Mirando la función vemos también que no posee ninguna simetría (e^5 no tiene nada que ver con e^{-5} por ejemplo) y tampoco tendrá ningún tipo de periodicidad.

Para estudiar la monotonía de la función calculamos la derivada, que en este caso es trivial pues recordemos que la exponencial es la única función cuya derivada es ella misma.

$$f'(x) = e^x \tag{2.58}$$

De la discusión anterior deducimos que $f'(x) > 0$ para cualquier x de modo que la función $f(x)$ será siempre creciente en todo el dominio. Calculando la derivada segunda para obtener la curvatura, tenemos de nuevo

$$f''(x) = e^x \tag{2.59}$$

y en este caso tendremos otra vez $f''(x) > 0$ para cualquier x, lo que nos dice que la función será siempre cóncava en todo el dominio.

	$(-\infty, \infty)$
$f'(x) = e^x$	$+$
$f''(x) = e^x$	$+$
$f(x) = e^x$	Creciente y cóncava

[7] Un error común es pensar que e^{-5} es un número negativo. Recuerda sin embargo que $e^{-5} = \frac{1}{e^5}$ que sigue siendo positivo. A medida que el exponente se hace más negativo, el resultado se aproximará a cero $e^{-3000} = \frac{1}{e^{3000}} \simeq 0$ pero siempre seguirá siendo positivo.

Siguiendo con las asíntotas, vemos que no habrá ningún punto problemático que pueda presentar asíntotas verticales, pero tendremos que calcular los límites para ver si tiene asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \tag{2.60}$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \tag{2.61}$$
$$\tag{2.62}$$

lo que nos demuestra que existe una asíntota horizontal en $y = 0$ cuando $x \to \infty$. Para terminar debemos ver si existen asíntotas oblicuas, de modo que calcularemos[8]

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \infty \tag{2.63}$$
$$\tag{2.64}$$

con lo que podemos concluir que la rama infinita que existe en $x \to \infty$ no es una asíntota. Nos falta solamente calcular los cortes con los ejes. Como ya razonamos al inicio, no existe ningún valor de x que anule a e^x, de modo que la función no cortará al eje horizontal. Respecto al vertical, tendremos que $f(0) = e^0 = 1$ y por tanto la función pasará por $(0, 1)$. Con todos estos datos ya estamos listos para dibujar la función.

La función logarítmica

Si la función exponencial era frecuente en en diversas ramas de la ciencia, la función logarítmica será igual de frecuente puesto que no es más que la función inversa de la anterior. En esta sección estudiamos brevemente sus características más relevantes

$$f(x) = \ln(x) \tag{2.65}$$

[8]Hacer este límite con las herramientas que tenemos es un poco complejo. Una opción es convencerse a uno mismo (usando una calculadora y dando valores crecientes) de que e^x crece mucho más rápido que x. De hecho, se puede demostrar que la exponencial gana a cualquier potencia y por tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty \quad \text{para cualquier } n$$

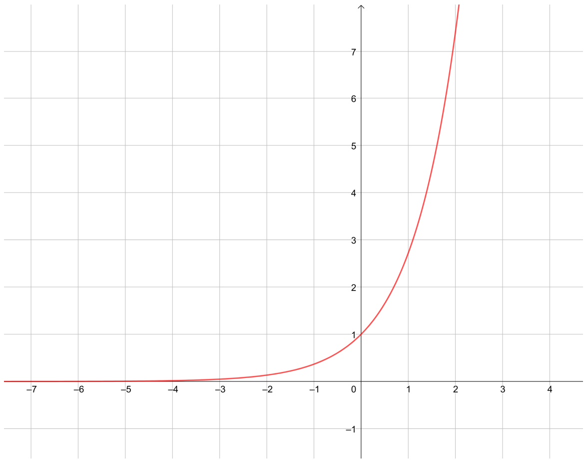


Figura 2.15: *Función exponencial* $f(x) = e^x$

El primer paso, como siempre, será estudiar el dominio, que nos vendrá heredado directamente de la imagen de la exponencial por ser su función inversa. En efecto, tal y como vimos hace algunas líneas e^x tiene como imagen los reales positivos $\mathbb{R}^+$, de modo que esto será lo único que tenga sentido usar como *input* para la función logarítmica, y por tanto no existirá el logaritmo de un número negativo. Con la imagen razonaremos de forma similar, ya que lo que era el domino de e^x será la imagen de $\ln(x)$ y por tanto la función generará como *output* a todos los números reales.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}^+ \,, \tag{2.66}$$

$$\text{Im } f = \mathbb{R} \,. \tag{2.67}$$

De nuevo, la función no posee ninguna simetría (de hecho ni siquiera tiene sentido el cambio $x \to -x$ al no estar definida en los negativos) y tampoco tendrá ningún tipo de periodicidad.

Para estudiar la monotonía de la función calculamos la derivada

$$f'(x) = \frac{1}{x} \,. \tag{2.68}$$

Llegados a este punto podríamos sentir la tentación de pensar que el signo de $f'(x)$ dependerá del signo de x, dando lugar a una función decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, \infty)$. Estaríamos equivocándonos, pues nos habríamos olvidado de que $\ln(x)$ sólo está definida en $x > 0$, de modo que no tiene sentido hablar de su derivada en los x negativos. Así pues, en el intervalo que nos interesa, que es $(0, \infty)$ la derivada será positiva y tendremos que la función $\ln(x)$ es creciente en todo su dominio.

Calculando la derivada segunda para obtener la curvatura, tenemos

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \tag{2.69}$$

y en este caso tendremos $f''(x) < 0$ para cualquier x del dominio, lo que nos dice que la función será siempre convexa en todo el dominio.

	$(0, \infty)$
$f'(x) = \frac{1}{x}$	$+$
$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	$-$
$f(x) = \ln(x)$	Creciente y convexa

Siguiendo con las asíntotas, nos encontramos un punto delicado, puesto que la función no va a estar definida en $x = 0$. Si pensamos en la exponencial en seguida nos daremos cuenta de por qué: no hay ningún número al que podamos elevar e que de como resultado cero. Lo máximo que podemos hacer es acercarnos al cero escogiendo x muy negativo, pero nunca llegaremos. Por este motivo, el cero no está en la imagen de e^x, ni está en el dominio de $\ln(x)$. Si tratamos de pensar cuáles son los puntos de la imagen de $\ln(x)$ para aquellos valores de x que están cercanos al cero, nos encontramos con que serán valores muy negativos. En otras palabras, si

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \tag{2.70}$$

entonces necesariamente[9]

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty\,. \tag{2.71}$$

La conclusión por lo tanto es que la función $\ln(x)$ presenta una asíntota vertical en $x = 0$. Chequeando las asíntotas horizontales tenemos

$$\lim_{x \to \infty} \ln(x) = \infty \tag{2.72}$$

de modo que no habrá ninguna en este caso.

Nos falta solamente calcular los cortes con los ejes. Como ya hemos razonado, la función no está siquiera definida en $x = 0$, de modo que la función no cortará al eje vertical. Respecto al horizontal, tendremos que resolver la ecuación $\ln(x) = 0$, que como sabemos[10] tiene como solución $x = 1$. El corte con el eje x por tanto se encontrará en el punto $(1, 0)$, y estamos listos para dibujar la función.

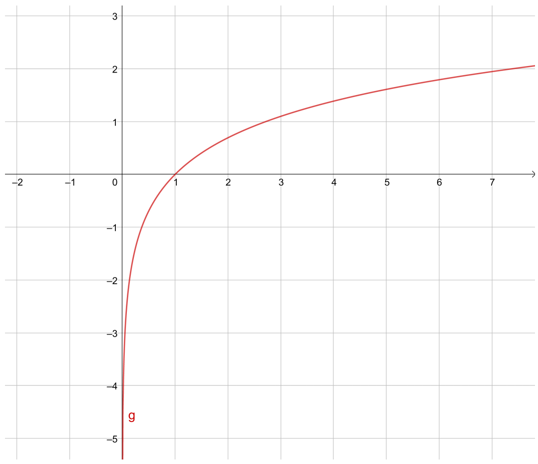


Figura 2.16: *Función logarítmica* $f(x) = \ln(x)$

[9]Si no te convence este argumento, haz una tabla de valores para $\ln(x)$ acercándote al cero y convéncete de que el resultado es un número cada vez más negativo.

[10]Recuerda que $e^0 = 1$

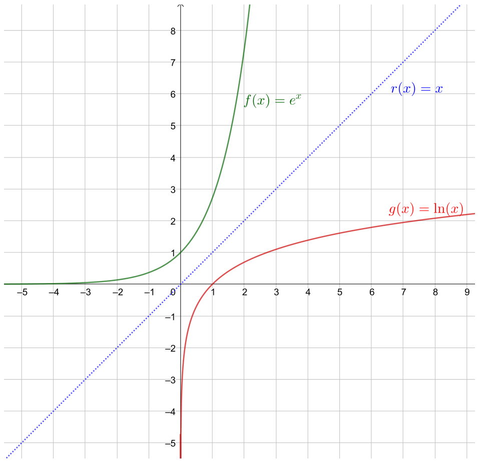


Figura 2.17: *Función exponencial y función logarítmica. Como podemos observar, cada una es el reflejo de la otra respecto del eje $r(x) = x$, tal y como ocurre siempre que estudiamos funciones inversas.*

2.4. Estudio y representación de funciones

2.5. Optimización de funciones

CAPÍTULO 3 Integración de funciones

Parte II

Álgebra

CAPÍTULO 4

Matrices. Álgebra de matrices. Determinantes

CAPÍTULO 5

Sistemas de ecuaciones lineales

CAPÍTULO 6 Programación lineal

Parte III

Probabilidad y estadística

CAPÍTULO 7 Probabilidad

CAPÍTULO 8

Inferencia estadística